

## Temă pentru acasă - partea B.

15 puncte [3p: B1] + [4p: B2] + [3p: B3] + [5p: B4]

Termen limită: 1-6 iunie 2024 (data precisă este stabilită de instructorul de laborator).

**B1.** (3 puncte) Volumul torului circular

$$TC(R, r) = \left\{ (x_1, x_2, x_3) : x_3^2 + \left( \sqrt{x_1^2 + x_2^2} - R \right)^2 < r^2 \right\} \subseteq [-R-r, R+r] \times [-R-r, R+r] \times [-r, r]$$

este  $2\pi^2 Rr^2$ . Estimați acest volum utilizând metoda Monte Carlo pentru  $R = 10, r = 3$  și comparați rezultatul cu valoarea exactă. Folosiți eșantioane de dimensiune 10000, 20000 și 50000 și calculați erorile relative.

**B2.** (4 puncte) Fie  $T$  următorul triunghi  $T = \{(x, y) : y \geq 0, y \leq 2x, y \leq 6 - 3x\}$ . Determinați o zonă rectangulară  $[a, b] \times [c, d]$  care include toate punctele interioare ale acestui triunghi și apoi estimați aria lui  $T$  folosind metoda Monte Carlo cu un eșantion de dimensiune cel puțin 20000.

**B3.** (3 puncte = 1p + 1p + 1p) Estimați valorile următoarelor integrale și comparați rezultatul cu valorile exacte:

$$(a) \int_{-1}^1 \frac{2x-1}{x^2-x-6} dx = \ln 3 - \ln 2;$$

$$(b) \int_3^{11} \frac{x+4}{\sqrt[3]{x-3}} dx = \lim_{a \rightarrow 3^+} \left( \int_a^{11} \frac{x+4}{\sqrt[3]{x-3}} dx \right) = 61.2;$$

$$(c) \int_0^{\infty} x e^{-x^2} dx = \frac{1}{2}.$$

**B4.** (5 puncte = 2p + 1p + 2p) Rețeaua de socializare nou lansată iSocialize are în anul 2024 10000 de utilizatori. În fiecare an rețeaua atrage un număr de utilizatori care urmează o distribuție binomială  $B(n, p)$ ; dintre utilizatorii existenți la începutul anului fiecare se poate retrage independent (de alți utilizatori) cu probabilitate  $q$ .

- Estimați numărul mediu de ani care trebuie să treacă până când iSocialize va avea cel puțin 15000 de utilizatori.
- Estimați probabilitatea ca după 40 ani și 10 luni să existe cel puțin 15000 de utilizatori în rețea.
- Estimați din nou această probabilitate cu o eroare de cel mult  $\pm 0.01$  cu probabilitatea 0.99.

Folosiți următoarele valori:  $n = 1000, p = 0.25, q = 0.01$ .

Rezolvările acestor exerciții (funcțiile R și apelurile lor) vor fi redactate într-un singur script R.