



## Table of contents

- 1 Variabile aleatoare - inegalități
  - Inegalitățile lui Markov și Cebâșev
  - Inegalitățile lui Chernoff și Hoeffding
- 2 Variabile aleatoare continue
  - Variabile aleatoare continue
  - Distribuții continue remarcabile
- 3 Teoremele fundamentale
  - Teorema lui Cebâșev
  - Legea numerelor mari
- 4 Exerciții
  - Inegalitățile lui Markov și Cebâșev
  - Variabile aleatoare continue
- 5 Bibliography

## Inegalitatea lui Markov

### Teorema 1.1

(Inegalitatea lui Markov.) Fie  $X \geq 0$  o variabilă aleatoare cu media  $\mathbb{E}[X] = \mu$ . Atunci

$$P\{X \geq t\} \leq \frac{\mu}{t}, \forall t > 0.$$

proof: în cazul în care variabila  $X$  este discretă și repartiția ei este

$$X : \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n & \dots \\ p_1 & p_2 & \dots & p_n & \dots \end{pmatrix},$$

unde  $x_1 < x_2 < \dots < x_n < \dots$ . Să presupunem că  $t \in (x_{k-1}, x_k]$  ( $x_0 = -\infty$ ), atunci  $\mu = \mathbb{E}[X] = \sum_i p_i x_i \geq \sum_{i \geq k} p_i x_i \geq t \sum_{i \geq k} p_i = t \cdot P\{X \geq t\}$ . ■

**Observație.** Probabilitatea ca o variabilă  $X \geq 0$  cu medie finită, să aibă valori mai mari sau egale decât un număr  $t$ , devine foarte mică pe măsură ce  $t$  crește.

## Inegalitatea lui Markov

### Propoziția 1

*Egalitatea are loc în inegalitatea lui Markov dacă și numai dacă*

$$P\{X = 0\} + P\{X = t\} = 1.$$

*Exemplu.* Fie  $X \geq 0$  o variabilă aleatoare cu  $\mathbb{E}[X] = 1$ . Să se majoreze probabilitățile

$$P\{X \geq 2\}, P\{X \geq 4\} \text{ și } P\{X \geq 2^k\}.$$

*Soluție:* Conform inegalității lui Markov

$$P\{X \geq 2\} \leq \frac{\mathbb{E}[X]}{2} = \frac{1}{2}, \quad P\{X \geq 4\} \leq \frac{\mathbb{E}[X]}{4} = \frac{1}{4},$$

$$P\{X \geq 2^k\} \leq \frac{\mathbb{E}[X]}{2^k} = \frac{1}{2^k} \clubsuit$$

## Inegalitatea lui Cebășev

## Teorema 1.2

(Inegalitatea lui Cebășev.) Fie  $X$  o variabilă aleatoare cu media  $\mathbb{E}[X] = \mu$  și dispersia  $\text{Var}[X] = \sigma^2$ . Atunci

$$P\{|X - \mu| \geq t\} \leq \frac{\sigma^2}{t^2}, \forall t > 0.$$

proof:

Considerăm variabila  $Y = (X - \mu)^2$  care are  $\mathbb{E}[Y] = \text{Var}[X]$ , conform inegalității lui Markov,

$$P\{|X - \mu| \geq t\} = P\{(X - \mu)^2 \geq t^2\} \leq \frac{\mathbb{E}[Y]}{t^2} = \frac{\sigma^2}{t^2}, \forall t > 0.$$



## Inegalitatea lui Cebâșev

- O posibilă interpretare a acestei inegalități este următoarea: dacă o variabilă are o dispersie mică, atunci probabilitatea ca această variabilă să ia valori departe de medie este scăzută.
- Următoarea consecință a inegalității lui Cebâșev spune că probabilitatea ca o variabilă să ia o valoare depărtată de medie la cel puțin  $k$  deviații standard este cel mult  $\frac{1}{k^2}$ .

### Corolarul 1.1

Fie  $X$  o variabilă cu media  $\mathbb{E}[X] = \mu$  și dispersia  $\text{Var}[X] = \sigma^2 > 0$ .

$$P\{|X - \mu| \geq k\sigma\} \leq \frac{1}{k^2}, \forall k > 0.$$

- În acest sens se poate spune că deviația standard este o măsură a împrăstierii valorilor variabilei în jurul mediei.

## Inegalitatea lui Cebâșev

## Propoziția 2

*Egalitatea are loc în inegalitatea lui Cebâșev dacă și numai dacă*

$$P\{X = \mu - t\} + P\{X = \mu\} + P\{X = \mu + t\} = 1.$$

*Exemplu.* Fie  $X$  o variabilă aleatoare cu  $\mathbb{E}[X] = 1$  și  $\text{Var}[X] = 4$ . Să se majoreze probabilitățile

$$P\{X \geq 3\}, P\{|X - 1| \geq 6\} \text{ și } P\{X \leq -9\}.$$

*Soluție:* Conform inegalității lui Cebâșev

$$P\{X \geq 3\} \leq P\{|X - 1| \geq 2\} \leq \frac{\text{Var}[X]}{2^2} = 1,$$

$$P\{|X - 1| \geq 6\} \leq \frac{4}{36} = \frac{1}{9},$$

$$P\{X \leq -9\} \leq P\{|X - 1| \geq 10\} \leq \frac{1}{25} \clubsuit$$

## Inegalitatea lui Chernoff

Probabilități și Statistică

Probabilități și Statistică

Probabilități și Statistică

Probabilități și Statistică

Probabilități și Statistică

Probabilități și Statistică

Probabilități și Statistică

Probabilități și Statistică

Probabilități și Statistică

## Teorema 2.1

Fie  $(X_i)_{1 \leq i \leq n}$  variabile independente, repartizate Bernoulli fiecare cu parametrul  $p_i$ . Dacă notăm  $X = \sum_{i=1}^n X_i$ ,  $\mu = \mathbb{E}[X]$ , atunci

$$P\{X > (1 + \delta)\mu\} < \left[ \frac{e^\delta}{(1 + \delta)^{1+\delta}} \right]^\mu \quad (\text{upper tail}), \forall \delta > 0 \text{ și}$$

$$P\{X < (1 - \delta)\mu\} < \left[ \frac{e^{-\delta}}{(1 - \delta)^{1-\delta}} \right]^\mu \quad (\text{lower tail}), \forall \delta \in [0, 1).$$

Probabilități și Statistică

Probabilități și Statistică

Probabilități și Statistică

Probabilități și Statistică

Probabilități și Statistică

Probabilități și Statistică

## Inegalitatea lui Chernoff

- Prima dintre inegalitățile de mai sus arată că suma unui număr finit de variabile Bernoulli independente scade exponențial pe măsură ce ne depărtăm (către dreapta) de media acestei sume:

$$\lim_{\delta \rightarrow +\infty} \left[ \frac{e^\delta}{(1+\delta)^{1+\delta}} \right]^\mu = 0.$$

- Ambele inegalități de mai sus au forme mai simple:

### Corolarul 2.1

Fie  $(X_i)_{1 \leq i \leq n}$  variabile independente, repartizate Bernoulli fiecare cu parametrul  $p_i$ . Dacă notăm  $X = \sum_{i=1}^n X_i$ ,  $\mu = \mathbb{E}[X]$ , atunci

$$P\{X > (1 + \delta)\mu\} < \exp\left(\frac{-\delta^2 \mu}{2 + \delta}\right), \forall \delta \geq 0.$$

## Inegalitatea lui Chernoff - o aplicație

*Aplicație.* Se aruncă de  $n$  ori o monedă și fie  $X_i$  o variabilă egală cu 1 dacă apare stema la a  $i$ -a aruncare și 0 altfel.  $X = \sum_{i=1}^n X_i$  numără de câte ori apare stema în cele  $n$  aruncări. Știm că

$$\mathbb{E}[X_i] = p_i = \frac{1}{2}, \quad \text{Var}[X_i] = p_i(1 - p_i) = \frac{1}{4},$$

$$\mu = \mathbb{E}[X] = \sum_{i=1}^n \mathbb{E}[X_i] = \frac{n}{2} \quad \text{și} \quad \sigma^2 = \text{Var}[X] = \sum_{i=1}^n \text{Var}[X_i] = \frac{n}{4}.$$

(Aceasta este o altă metodă de a calcula caracteristicile unei variabile binomiale.)

Folosind inegalitatea lui Chernoff putem evalua probabilitatea ca variabila  $X$  să fie mai mare decât media astfel

## Inegalitatea lui Chernoff - o aplicație

$$P\{X > \mu + \lambda\} = P\left\{X > \left(1 + \frac{\lambda}{\mu}\right) \mu\right\} < \exp\left(\frac{-\lambda^2}{\lambda + 2\mu}\right).$$

Vom utiliza acum și inegalitățile lui Markov și Cebâșev:

$$P\{X \geq \mu + \lambda\} \leq \frac{\mu}{\mu + \lambda} = \frac{n}{n + 2\lambda} \text{ (Markov),}$$

$$P\{X \geq \mu + \lambda\} \leq P\{|X - \mu| \geq \lambda\} \leq \frac{\sigma^2}{\lambda^2} = \frac{n}{4\lambda^2} \text{ (Cebâșev).}$$

$$P\{X > \mu + \lambda\} < \exp\left(\frac{-\lambda^2}{\lambda + n}\right) \text{ (Chernoff).}$$

Se observă că inegalitatea lui Markov este mai slabă decât aceea a lui Cebâșev, iar aceasta este mai slabă decât cea a lui Chernoff. Pe de altă parte însă, inegalitatea lui Markov (ca și cea a lui Cebâșev) nu necesită independența celor  $n$  variabile aleatoare; în al doilea caz însă, independența poate ușura calculul dispersiei lui  $X$ .

## Inegalitatea lui Hoeffding

Probabilități și Statistică

Probabilități și Statistică

Probabilități și Statistică

### Teorema 2.2

Fie  $X_1, X_2, \dots, X_n$  variabile aleatoare independente mărginite:  $a_i \leq X_i \leq b_i$ ,  $a_i \neq b_i \in \mathbb{R}$ ,  $i = \overline{1, n}$  și  $X = \sum_{i=1}^n X_i$ . Atunci

$$P\{X - \mathbb{E}[X] \geq \delta\} \leq \exp\left(-\frac{2\delta^2}{\sum_{i=1}^n (b_i - a_i)^2}\right), \forall \delta \geq 0.$$

Probabilități și Statistică

Probabilități și Statistică

Probabilități și Statistică

### Corolarul 2.2

În condițiile teoremei avem

$$P\{|X - \mathbb{E}[X]| \geq \delta\} \leq 2 \exp\left(-\frac{2\delta^2}{\sum_{i=1}^n (b_i - a_i)^2}\right), \forall \delta \geq 0.$$

## Variabile aleatoare continue - Evenimente aleatoare

- În cazul în care  $|\Omega| \geq |\mathbb{R}|$  (i.e., cardinalul lui  $\Omega$  este cel puțin continuu), evenimentele aleatoare se definesc diferit față de cazul discret.
- Diferența principală constă în aceea că **nu orice submulțime  $A \subseteq \Omega$  este în mod necesar eveniment aleator**: din rațiuni tehnice familia evenimentelor aleatoare este o  $\sigma$ -algebră  $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ :
  - $\emptyset, \Omega \in \mathcal{A}$ ;
  - dacă  $A_1, A_2 \in \mathcal{A}$ , atunci  $A_1 \cap A_2 \in \mathcal{A}$ ;
  - dacă  $(A_n)_{n \geq 1} \subseteq \mathcal{A}$ , atunci  $\bigcup_{n \geq 1} A_n \in \mathcal{A}$ .
- Iar funcția de probabilitate este definită numai pe submulțimile din  $\mathcal{A}$  (cu axiomele cunoscute):

$$P : \mathcal{A} \rightarrow [0, 1].$$

## Variabile aleatoare continue

- O funcție  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  este numită **variabilă aleatoare** dacă pentru orice interval  $J$  din  $\mathbb{R}$ ,  $X^{-1}(J) \in \mathcal{A}$ .
- O variabilă aleatoare  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  se numește **continuă** dacă are funcția de repartiție continuă (*câteodată, această definiție se referă la toate cazurile când  $X(\Omega)$  este de cardinal continuu*).
- Distribuția (repartiția) unei astfel de variabile poate fi dată prin **funcția de distribuție cumulativă** (sau, pe scurt, **de distribuție sau repartiție**):
 
$$F : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1], F(a) = P(X \leq a),$$
- sau prin **funcția de densitate (de masă) de probabilitate**,  $f : \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty)$ , astfel încât funcția de repartiție  $F$  poate fi descrisă astfel:

$$F(a) = P(X \leq a) = \int_{-\infty}^a f(t) dt.$$

## Variabile aleatoare continue

- Orice funcție  $f : \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty)$  cu  $\int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt = 1$  este funcție de densitate pentru o anumită avariabilă aleatoare continuă (sau, mai simplu, distribuție continuă).
- Folosind funcția de densitate putem calcula (dacă integralele există) media și dispersia:

$$\mathbb{E}[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} tf(t) dt \text{ și } \text{Var}[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} [t - \mathbb{E}[X]]^2 f(t) dt.$$

- Dacă  $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  este o funcție reală (și continuă), iar  $X$  este o variabilă aleatoare cu densitatea  $f$ , atunci  $h(X)$  este o variabilă aleatoare cu media

$$\mathbb{E}[h(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)f(t) dt.$$

## Variabile aleatoare continue

- Probabilitățile asociate unei variabile aleatoare continue se calculează astfel:

$$P(a < X \leq b) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(t) dt,$$

adică aria aflată sub graficul funcției  $f$  între punctele  $t = a$  și  $t = b$ .

- Dacă  $F$  este continuă,  $P(X = a) = 0$  și  $P(a \leq X < b) = P(a < X \leq b) = P(a < X < b)$ .
- Pentru o variabilă aleatoare  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , dată, operația de **standardizare** constă în următoarea transformare a variabilei  $X$ :

$$Y = \frac{X - \mathbb{E}[X]}{StDev[X]}.$$

- Noua variabilă este "standard" pentru că are

$$\mathbb{E}[Y] = 0 \text{ și } Var[Y] = 1.$$

## Variabile aleatoare continue - Exemplu

**Exemplu.** Durata vieții în ani a unei anumite componente electronice este o variabilă aleatoare continuă, cu funcția de densitate

$$f(x) = \begin{cases} \frac{k}{x^4}, & x \geq 1 \\ 0, & x < 1 \end{cases}$$

Determinați  $k$ , funcția de repartiție și probabilitatea ca viața unei astfel de componente să depășească 2 ani.

**Soluție.** Trebuie ca  $f(t) \geq 0, \forall t \in \mathbb{R}$  și  $\int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt = 1$ , deci  $k \geq 0$  și

$$1 = \int_1^{\infty} \frac{k}{t^4} dt = \left[ -\frac{k}{3t^3} \right]_1^{\infty} = \frac{k}{3}, \text{ de unde } k = 3.$$

## Variabile aleatoare continue - Exemple

Funcția de repartiție este  $F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$ , deci

$$F(x) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{x^3}, & x \geq 1 \\ 0, & x < 1 \end{cases}$$

Fie  $X$  durata de viață a acestei componente electronice, probabilitatea ca durata de viață să fie cel puțin 2 ani este  $P(X \geq 2) = 1 - P(X < 2) = 1 - F(2) = 1/8$  (deoarece  $F$  e continuă).

## Distribuții continue remarcabile

*Distribuția uniformă.* Se notează cu  $U(a, b)$  și are funcția de densitate probabilitate

$$f(t) = \begin{cases} 0, & x < a \\ \frac{1}{b-a}, & x \in [a, b] \\ 0, & x > b \end{cases}$$

Dacă  $X : U(a, b)$ , atunci  $\mathbb{E}[X] = \frac{a+b}{2}$  and  $\text{Var}[X] = \frac{(b-a)^2}{12}$ .

$U(0, 1)$  se numește *distribuția uniformă standard*.

## Distribuții continue remarcabile

*Distribuția exponențială.* Se notează cu  $Exp(\lambda)$  și are funcția de densitate ( $\lambda > 0$ )

$$f(t) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \end{cases}$$

Pentru  $X : Exp(\lambda)$ ,  $\mathbb{E}[X] = \frac{1}{\lambda}$ ,  $Var[X] = \frac{1}{\lambda^2}$ .

*Distribuția exponențială este utilizată pentru a modela timpul de așteptare, timpul între două sosiri, durata de viață hardware etc; într-o secvență de evenimente rare timpul dintre două astfel de evenimente este distribuit exponențial.*

Distribuția exponențială nu are memorie (trecerea a  $x_0$  minute nu are relevanță): chiar dacă  $X > x$ , când timpul total de așteptare depășește  $x$ , timpul rămas are o distribuție exponențială:  $P(X > x + \Delta x | X > x) = P(X > \Delta x)$  (de ce?).

## Distribuții continue remarcabile

*Distribuția gaussiană (normală)*. Se notează cu  $N(\mu, \sigma^2)$  și are funcția de densitate

$$f(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(t - \mu)^2}{2\sigma^2}}.$$

Dacă  $X : N(\mu, \sigma^2)$ , atunci  $\mathbb{E}[X] = \mu$  and  $Var[X] = \sigma^2$ .

Distribuția  $N(0, 1)$  este numită *distribuția normală standard*.

Valorile unei variabile normal distribuite au următoarea împrăștiere (simetric în jurul mediei): %68 se găsesc în intervalul  $[\mu - \sigma, \mu + \sigma]$ , %95 în  $[\mu - 2\sigma, \mu + 2\sigma]$ , iar %99.7 aparțin intervalului  $[\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma]$ .

## Distribuții continue remarcabile

- Distribuția normală are un rol central în teoria probabilităților și statistică pentru cel puțin două motive.
- Drept o consecință a Teoremei Limită Centrale (TLC - vezi mai jos) sumele și/sau mediile variabilelor independente și identic distribuite au ca aproximație o distribuție normală.
- De-a lungul timpului s-a observat că distribuția normală este un model potrivit pentru foarte multe variabile: temperatura, greutatea, înălțimea și chiar notele studenților.
- Distribuția normală a fost utilizată implicit de către de Moivre pentru aproximarea distribuției binomiale și ulterior de către Laplace și Gauss (în mod explicit).

## Distribuții continue remarcabile

*Distribuția Student (sau t).* Este notată cu  $t(r)$  și are funcția de densitate

$$f(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{r+1}{2}\right)}{\sqrt{r\pi}\Gamma\left(\frac{r}{2}\right)} \left(1 + \frac{x^2}{r}\right)^{-\frac{r+1}{2}},$$

unde  $\Gamma(y) = \int_0^{+\infty} x^{y-1} e^{-x} dx$ . Dacă  $X : t(r)$ , atunci  $\mathbb{E}[X] = 0$  and  $Var[X] =$

$$\frac{r}{r-2}.$$

Cu cât este mai mare numărul de grade de libertate cu atât distribuția Student seamănă mai mult cu cea normală standard.

## Distribuții continue remarcabile

*Distribuția Gamma.* Se notează cu  $\Gamma(\alpha, \lambda)$  și are funcția de densitate

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\lambda x}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases},$$

unde  $\Gamma(t) = \int_0^{+\infty} x^{t-1} e^{-x} dx$ .  $\alpha$  este forma iar  $\lambda$  este rata (sau frecvența)

distribuției. Pentru  $X : \Gamma(\alpha, \lambda)$ , avem  $\mathbb{E}[X] = \frac{\alpha}{\lambda}$  and  $\text{Var}[X] = \frac{\alpha}{\lambda^2}$ .

*Să presupunem că avem un proces care constă în  $\alpha$  pași independenți și fiecare astfel de pas necesită un timp egal cu  $\text{Exp}(\lambda)$ , atunci durata totală urmează o distribuție Gamma.*

Astfel, distribuția Gamma este o sumă de  $\alpha$  variabile independente identic repartizate exponențial.

## Distribuții continue remarcabile

**Distribuția  $\chi^2$ .** Se notează cu  $\chi^2(r)$ , unde  $r \in \mathbb{N}^*$  este numărul de grade de libertate. Funcția ei de densitate este

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^{r/2-1} e^{-x/2}}{2^{r/2} \Gamma(r/2)} x^{\alpha-1} e^{-\lambda x}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases},$$

unde  $\Gamma(t) = \int_0^{+\infty} x^{t-1} e^{-x} dx$ .

Distribuția  $\chi^2$  este un caz particular de distribuție Gamma: când  $X : \chi^2(r)$ , avem  $X : \text{Gamma}(r/2, 1/2)$ .

Această distribuție este frecvent utilizată în statistica inferențială (vom vedea mai tarziu în ce fel) pentru a testa concordanța unei distribuții empirice cu una teoretică (goodness of fit test) sau pentru a testa independența a două variabile aleatoare categorice.

## Distribuții continue remarcabile

*Distribuția Fisher.* Se notează cu  $F(r_1, r_2)$ , unde  $r_1, r_2 \in \mathbb{N}^*$  sunt numerele de grade de libertate. Funcția ei de densitate este

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{\frac{(r_1 x)^{r_1} r_2^{r_2}}{(r_1 x + r_2)^{r_1 + r_2}}}}{xB(r_1/2, r_2/2)}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0 \end{cases},$$

unde  $B(t_1, t_2) = \int_0^1 x^{t_1-1} (1-x)^{t_2-1} dx$ .

La fel ca  $Exp(\lambda)$ ,  $Gamma(\alpha, \lambda)$ , and  $\chi^2(r)$ , distribuția Fisher este nenegativă și ne-simetrică. Este folosită în statistica inferențială mai ales în *analiza varianței (dispersiei) - ANOVA*.

## Distribuții continue remarcabile

**Distribuția  $\chi^2$ .** Se notează cu  $\chi^2(r)$ , unde  $r \in \mathbb{N}^*$  este numărul de grade de libertate. Funcția ei de densitate este

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^{r/2-1} e^{-x/2}}{2^{r/2} \Gamma(r/2)} x^{\alpha-1} e^{-\lambda x}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases},$$

where  $\Gamma(t) = \int_0^{+\infty} x^{t-1} e^{-x} dx$ .

Distribuția  $\chi^2$  este un caz particular de distribuție Gamma: când  $X : \chi^2(r)$ , avem  $X : \text{Gamma}(r/2, 1/2)$ .

Această distribuție este frecvent utilizată în statistica inferențială (vom vedea mai tarziu în ce fel) pentru a testa concordanța unei distribuții empirice cu una teoretică (goodness of fit test) și pentru a testa independența a două variabile aleatoare categorice.

## Inegalitățile lui Markov și a lui Cebâșev revăzute

## Propoziția 3

Fie  $X \geq 0$  o variabilă aleatoare continuă care are funcție de densitate de probabilitate. Dacă  $a > 0$ , atunci

$$P(X \geq a) \leq \frac{\mathbb{E}[X]}{a}.$$

proof:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X] &= \int_0^{+\infty} tf(t)dt = \int_0^a tf(t)dt + \int_a^{+\infty} tf(t)dt \geq \\ &\int_a^{+\infty} tf(t)dt \geq a \int_a^{+\infty} f(t)dt = aP(X \geq a). \end{aligned}$$

În mod similar rezultă inegalitatea lui Cebâșev pentru variabile aleatoare continue care au funcție de densitate. ■

## Teorema lui Cebășev

## Teorema 1.1

Fie  $(X_n)_{n \geq 1}$  un șir de variabile aleatoare independente având dispersii finite, uniform mărginite, i. e.  $\text{Var}[X_n] \leq c$ , pentru orice  $n \geq 1$ . Atunci

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left( \left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{E}[X_i] \right| < \epsilon \right) = 1.$$

proof: Știm că

$$\mathbb{E} \left[ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \right] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{E}[X_i] \text{ și}$$

$$D^2 \left[ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \right] = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \text{Var}[X_i] < \frac{c}{n}.$$

## Teorema lui Cebășev

Folosind inegalitatea lui Cebășev pentru variabila  $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$  obținem

$$1 \geq P \left( \left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{E}[X_i] \right| < \epsilon \right) \geq 1 - \frac{D^2 \left[ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \right]}{\epsilon^2} \geq 1 - \frac{c}{n\epsilon^2}.$$

Trecând la limită,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left( \left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{E}[X_i] \right| < \epsilon \right) = 1. \blacksquare$$

## Legea numerelor mari - varianta slabă

- Legea numerelor mari spune că pe măsură ce crește numărul de variabile independente, identic distribuite, media lor de selecție se apropie de media lor comună.

### Teorema 2.1

*(Legea slabă numerelor mari, legea lui Khintchine) Fie  $(X_n)_{n \geq 1}$  un șir de variabile aleatoare independente și identic distribuite cu media  $\mu$  și dispersia  $\sigma^2$ . Atunci*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left( \left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i - \mu \right| < \epsilon \right) = 1 \text{ sau}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left( \left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i - \mu \right| \geq \epsilon \right) = 0.$$

## Legea numerelor mari - varianta tare

proof: O consecință a teoremei 1.1:

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{E}[X_i] = \mu.$$

## Teorema 2.2

(Legea tare numerelor mari) Fie  $(X_n)_{n \geq 1}$  un șir de variabile aleatoare independente și identic distribuite cu media  $\mu$  și dispersia  $\sigma^2$ . Atunci

$$P \left( \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i = \mu \right) = 1.$$

proof: Fiind prea complicată este omisă.

## Un exemplu cu frecvențe

- Bernoulli a demonstrat primul legea slabă numerelor mari dar doar pentru distribuțiile care-i poartă numele.
- Să presupunem că avem o experiență aleatoare și un eveniment aleator asociat  $A$  cu  $P(A) = p$ . Repetăm în mod independent experiența și considerăm următorul șir de variabile aleatoare :  $X_i = 1$  dacă  $A$  se produce la a  $i$ -a repetare și 0 altfel.
- Variabilele sunt independente și distribuite Bernoulli cu media  $p$ . Legea numerelor mari spune că, cu probabilitate 1,

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \rightarrow p.$$

- $\sum_{i=1}^n X_i$  este numărul de realizări ale evenimentului  $A$  în  $n$  repetări ale experienței. Altfel spus, conform legii numerelor mari,  $A$  apare cu frecvența  $p$ .

## Teorema lui Bernoulli

## Propoziția 4

Fie  $\alpha_n$  numărul de apariții ale unui eveniment  $A$  în  $n$  repetări independente ale unei experiențe aleatoare. Dacă  $f_n = \frac{\alpha_n}{n}$  este frecvența relativă a apariției lui  $A$ , atunci șirul  $(f_n)_{n \geq 1}$  converge în probabilitate la  $p = P(A)$ .

proof:  $\alpha_n = nf_n$  este o variabilă distribuită binomial, astfel  $\mathbb{E}[\alpha_n] = np$  și  $\text{Var}[\alpha_n] = np(1 - p)$ . Mai mult,

$$\begin{aligned} P(|f_n - p| < \epsilon) &= P(|\alpha_n - np| < n\epsilon) = P(|\alpha_n - \mathbb{E}[\alpha_n]| < n\epsilon) \geq \\ &\geq 1 - \frac{p(1-p)}{n\epsilon^2}. \end{aligned}$$

Evident, trecând la limită,  $\lim_{n \rightarrow \infty} P(|f_n - p| < \epsilon) = 1$ , pentru orice  $\epsilon > 0$ .



## Puțină istorie

- James Bernoulli a demonstrat legea slabă a numerelor mari în 1700; Poisson i-a generalizat rezultatul în 1800.
- Cebâșev a descoperit inegalitatea care-i poartă numele în 1866, iar Markov a extins rezultatul lui Bernoulli la variabile aleatoare dependente.
- În 1909 Émile Borel a demonstrat teorema care astăzi este cunoscută sub numele de legea tare a numerelor mari (care generalizează o dată în plus teorema lui Bernoulli).
- În 1926 Kolmogorov a obținut o condiție mai generală, suficientă pentru ca un șir de variabile aleatoare independente să respecte legea numerelor mari. Condiția este

$$\sum_{n \geq 1} \frac{\text{Var}[X_n]}{n^2} < +\infty.$$

## Exerciții pentru seminar

- Inegalitățile lui Markov și Cebâșev: I.1, I.3, I.5, I.6, I.7, I.8, I.9.
- Variabile aleatoare continue: II.1, II.4, II.5, II.6 ( $f_1, f_3$ ).
- Rezervă: I.10, I.11, II.3.



## Exerciții - inegalitățile lui Markov și Cebâșev

I.1. O variabilă aleatoare  $X \geq 0$  are media și dispersia egale amândouă cu 20. Folosind inegalitățile lui Markov și Cebâșev ce se poate spune despre probabilitatea  $P\{X \geq 40\}$ ? Dar despre  $P\{-60 \leq X \leq 100\}$ ?

I.2. Se dă o variabilă aleatoare  $X \geq 0$  cu  $\mathbb{E}[X] = \text{Var}[X] = 1$ . Majorați sau minorați, corespunzător, folosind inegalitățile lui Markov și Cebâșev, următoarele probabilități:

$$P\{X \geq 2\}, P\{|X - 1| \geq 2\}, P\{X \leq -3\}$$

I.3. O variabilă aleatoare  $X \geq 0$  are  $\mathbb{E}[X] = \text{Var}[X] = 2$ . Folosind inegalitățile lui Markov și Cebâșev ce se poate spune despre probabilitatea  $P\{X \geq 8\}$ ? Dar despre  $P\{|X - 2| \geq 8\}$ ?

I.4. Fie  $X \geq 0$  variabilă aleatoare cu  $\mathbb{E}[X] = 2$  și  $\text{Var}[X] = 1$ . Folosind inegalitățile lui Markov și Cebâșev, ce se poate spune despre probabilitățile  $P\{X \geq 6\}$  și  $P\{|X - 1| \geq 5\}$ ?

## Exerciții - inegalitățile lui Markov și Cebășev

I.5. O variabilă aleatoare  $X \geq 0$  are  $\mathbb{E}[X] = 2$  și  $\text{Var}[X] = 3$ . Folosind inegalitățile lui Markov și Cebășev ce se poate spune despre probabilitatea  $P\{X \geq 8\}$ ? Dar despre  $P\{|X - 2| \geq 4\}$ ?

I.6. Probabilitatea de a apărea stema la o aruncare a unei monede falsificate este 0.3. Moneda este aruncată de 300 de ori. Majorați probabilitatea ca stema să apară de cel puțin 100 de ori.

I.7. Probabilitatea de a apărea stema la o aruncare a unei monede falsificate este 0.2. Moneda este aruncată de  $n$  ori. Găsiți un majorant pentru probabilitatea ca stema să apară în cel puțin 50% din cazuri.

I.8. Două monede sunt aruncate de 25 de ori. Probabilitatea de a apărea stema la o aruncare este 0.25 pentru prima monedă și 0.8 pentru cea de-a doua. Folosind inegalitățile lui Markov și Cebășev, găsiți câte un majorant pentru probabilitatea ca stema să apară simultan pe ambele monede de cel puțin 10 de ori.

## Exerciții - inegalitățile lui Markov și Cebâșev

I.9. Se aruncă două zaruri de 36 de ori. Folosind inegalitățile lui Markov și Cebâșev, găsiți un majorant pentru probabilitatea ca produsul zarurilor să fie un număr prim de cel puțin 10 ori.

I.10. Două monede sunt aruncate de 32 de ori. Probabilitatea de a apărea stema la o aruncare este  $1/3$  pentru prima monedă și  $3/4$  pentru cea de-a doua. Folosind inegalitățile lui Markov și Cebâșev, găsiți câte un majorant pentru probabilitatea ca stema să apară simultan pe ambele monede de cel puțin 12 de ori.

I.11. Se aruncă o monedă de  $n$  ori. Fie  $X$  numărul de apariții ale stemei. Găsiți câte un majorant (cât mai mic) pentru

(a)  $P\{|X - n/2| > \sqrt{n}\}$  și  $P\{X > n/2 + \sqrt{n}\}$ ;

(b)  $P\{|X - n/2| > 5\sqrt{n}\}$  și  $P\{X > n/2 + 5\sqrt{n}\}$ .

I.12. Fie  $X$  o variabilă repartizată a Poisson cu parametrul  $\lambda$ . Estimați probabilitatea ca  $X$  să devieze de la medie cu cel puțin  $2\sqrt{\lambda}$ .

## Exerciții - inegalitățile lui Markov și Cebășev

I.13\*. (Borel-Cantelli) Fie  $(A_n)_{n \geq 1}$  un șir de evenimente cu  $\sum_{n \geq 1} P(A_n) < +\infty$ . Arătați că probabilitatea ca cel mult  $k$  dintre aceste evenimente să se producă este cel puțin

$$1 - \frac{\sum_{n \geq 1} P(A_n)}{k}.$$

(Indicație: Folosiți inegalitatea lui Markov pentru o variabilă care numără câte din evenimente se realizează.)

## Exerciții - variabile aleatoare continue

II.1. Fie  $X$  o variabilă aleatoare continuă cu următoarea funcție de densitate de probabilitate:

$$f(t) = \begin{cases} \alpha t, & 0 \leq t \leq 2 \\ 0, & \text{altfel} \end{cases}.$$

- (a) Aflați  $\alpha$  și funcția cumulativă de distribuție (de repartiție) a lui  $X$ .
- (b) Calculați media și dispersia lui  $X$ .

II.2. Timpul (în minute) necesar unui anumit sistem să repornească este o variabilă aleatoare continuă cu funcția de densitate de probabilitate

$$f(t) = \begin{cases} C(10 - t)^2, & 0 < t < 10 \\ 0, & \text{altfel} \end{cases}.$$

- (a) Aflați  $C$  și funcția cumulativă de distribuție a lui  $X$ .
- (b) Calculați probabilitatea ca timpul de repornire să fie între 1 și 2 minute și  $P(X > 1 | X < 3)$ .

## Exerciții - variabile aleatoare continue

II.3. Durata de viață (în ani) a unui tip de HD este o variabilă aleatoare continuă cu densitatea

$$f(t) = \begin{cases} K - \frac{t}{50}, & 0 < t < 10 \\ 0, & \text{altfel} \end{cases}$$

- (a) Aflați  $K$  și funcția de repartiție lui  $X$ .
- (b) Calculați probabilitatea ca o eroare hardware să apară în primii 5 ani și durata medie de viață a acestui HD.

II.4. Considerăm o variabilă aleatoare continuă cu funcția de densitate de probabilitate

$$f(t) = \begin{cases} \alpha\sqrt{t}, & 0 < t < 1 \\ 0, & \text{altfel} \end{cases}$$

- (a) Aflați  $\alpha$  și funcția de repartiție lui  $X$ .
- (b) Calculați probabilitatea  $P(0.3 < X < 0.6)$  și  $\mathbb{E}[X]$ .

## Exerciții - variabile aleatoare continue

II.5. Considerăm o variabilă aleatoare continuă cu funcția de densitate de probabilitate

$$f(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ \frac{t}{t+1}, & t \geq 0 \end{cases}$$

(a) Calculați  $P(0 < X < 3)$ ,  $P(X > 0 | X \leq 2)$  și  $\mathbb{E}[X]$ .







(b) Determinați funcția de densitate de probabilitate a lui  $X$ .

II.6. Care dintre următoarele funcții pot fi funcții de densitate de probabilitate? (În caz afirmativ determinați constanta  $\alpha$ .)

$$f_1(t) = \begin{cases} \alpha(t^2 - t), & 0 \leq t \leq 1 \\ 0, & \text{altfel} \end{cases}; f_2(t) = \begin{cases} \alpha t^2, & 0 \leq t \leq 2 \\ 0, & \text{altfel} \end{cases};$$

$$f_3(t) = \begin{cases} \alpha(t^3 - 2t), & -1 \leq t \leq 1 \\ 0, & \text{altfel} \end{cases}; f_4(t) = \begin{cases} \frac{\alpha}{t}, & 0 < t \leq 2 \\ 0, & \text{altfel} \end{cases}.$$

## Bibliography I

-  Bertsekas, D. P., J. N. Tsitsiklis, *Introduction to Probability*, Athena Scientific, 2002.
-  Gordon, H., *Discrete Probability*, Springer Verlag, New York, 1997.
-  Johnson, J. L., *Probability and Statistics for Computer Science*, Wiley Interscience, 2008.
-  Lipschutz, S., *Theory and Problems of Probability*, Schaum's Outline Series, McGraw-Hill, 1965.
-  Mitzenmacher, M., E. Upfal, *Probability and Computing: Randomized Algorithms and Probabilistic Analysis*, Cambridge University Press, 2005.
-  Ross, S. M., *A First Course in Probability*, Prentice Hall, 5th edition, 1998.

## Bibliography II



Stone, C. J., *A Course in Probability and Statistics*, Duxbury Press, 1996.