Probabilităţi şi statistică - Curs 5

16 martie 2026

Table of contents

Repartiţia binomială negativă $NB(r, p)$

- Considerăm din nou o experienă aleatoare cu două rezultate posibile: succes sau eşec. Succesul apare cu probabilitate cunoscută p.
- Repetăm independent această experienţă până când se produc r $(\in \mathbb{N}^*)$ succese.
- Fie X variabila care numără câte eşecuri apar până la realizarea celor r succese. Această variabilă se spune că urmează o distribuţie binomială negativă cu parametrii r şi p: $NB(r,p)$.
- Distribuţia ei este

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & k & \dots \\ \binom{r-1}{r-1}p^r & \binom{r}{r-1}p^r(1-p) & \dots & \binom{k+r-1}{r-1}p^r(1-p)^k & \dots \end{pmatrix}$$

- Caracteristicile sunt

$$\mathbb{E}[X] = \frac{r(1-p)}{p}, Var[X] = \frac{r(1-p)}{p^2}.$$

Repartiţia binomială negativă $NB(r, p)$ - Exemplu

Exemplu. Un cercetător trebuie să recruteze 20 de persoane pentru un studiu asupra unui medicament experimental pentru COVID-19. Fiecare persoană pe care (în mod independent) o intervievează are 60% şanse de a fi eligibilă pentru a participa la acest studiu.

(a) Calculaţi probabilitatea ca cercetătorul să refuze mai mult de 10 de persoane (înainte de a recruta cele 20 de persoane de care e nevoie).

(b) Calculaţi numărul mediu de refuzuri şi numărul mediu de interviuri.

Solution: (a) Numărul de persoane pe care trebuie să le refuze X : $NB(20, 0.6)$.

$$P(X > 10) = \sum_{k>10} \binom{k+19}{19} (0.6)^{20} (0.4)^k =$$

$$= 1 - \sum_{k\leqslant 10} \binom{k+19}{19} (0.6)^{20} (0.4)^k$$

(b) $\mathbb{E}[X] = 20 \cdot 0.4/0.6 \cong 13.33$. Numărul mediu de persoane intervievate este $\mathbb{E}[X] + 20 = 33.3$.

Repartiţii discrete remarcabile - Repartiţia hipergeometrică

- Reluăm contextul schemei bilei neîntoarse: într-o urnă sunt n bile de două culori (n_1 albe şi n_2 negre) şi se extrag simultan k bile din urnă. Se notează cu X numărul de bile albe obţinute; această variabilă se spune că este repartizată hipergeometric.
- Tabloul său de repartiţie (vezi şi schema bilei neîntoarse) este

$$X : \begin{pmatrix} 0 & 1 & \ldots & j & \ldots & r \\ \dfrac{\binom{n_1}{0}\binom{n_2}{k}}{\binom{n}{k}} & \dfrac{\binom{n_1}{1}\binom{n_2}{k-1}}{\binom{n}{k}} & \ldots & \dfrac{\binom{n_1}{j}\binom{n_2}{k-j}}{\binom{n}{k}} & \ldots & \dfrac{\binom{n_1}{r}\binom{n_2}{k-r}}{\binom{n}{k}} \end{pmatrix},$$

unde $r = \min\{k, n_1\}$.

- Media şi dispersia ei sunt

$$\mathbb{E}[X] = \frac{kn_1}{n}, Var[X] = k \cdot \frac{n-k}{n-1} \cdot \frac{n_1}{n} \cdot \frac{n_2}{n}$$

Repartiţia Zipf

- Aceasta este o distribuţie discretă empirică folosită mai ales în lingvistică deşi a fost observată şi în alte domenii.
- Legea lui Zipf: frecvenţa unei valori într-un grup este aproape egală cu inversul rangului acestei valori în grupul sortat descrescător.
- Să presupunem că numărăm cuvintele dintr-o carte şi le aranjăm în ordinea descrescătoare a frecvenţei lor, atunci frecvenţa unui cuvânt este practic inversul rangului acelui cuvânt.
- Pentru n obiecte, distribuţia este

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & k & \ldots & n \\ \frac{1}{H_n}\cdot\frac{1}{1} & \frac{1}{H_n}\cdot\frac{1}{2} & \ldots & \frac{1}{H_n}\cdot\frac{1}{k} & \ldots & \frac{1}{H_n}\cdot\frac{1}{n} \end{pmatrix}$$

- Caracteristicile sunt $\mathbb{E}[X] = \frac{n}{H_n}$, $Var[X] = \frac{n^2}{H_n^2}$, unde

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}, (n \in \mathbb{N}^*).$$

Repartiţii comune

- Fie X şi Y două variabile aleatoare discrete cu repartiţiile

$$X : \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n & \dots \\ p_1 & p_2 & \dots & p_n & \dots \end{pmatrix} \text{ şi } Y : \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_m & \dots \\ q_1 & q_2 & \dots & q_m & \dots \end{pmatrix}.$$

Definiţia 1

Repartiţia comună *a celor două variabile este formată din mulţimea tripletelor*

$$(x_i, y_j, P\{X = x_i \cap Y = y_j\})_{i,j}$$

Repartiţii comune

- Dacă notăm cu $r_{ij} = P\{X = x_i \cap Y = y_j\}$ repartiţia comună se poate reprezenta într-un tablou astfel:

		X					
		x_1	x_2	$\cdots$	x_i	$\cdots$	
	y_1	r_{11}	r_{21}	$\cdots$	r_{i1}	$\cdots$	q_1
	y_2	r_{12}	r_{22}	$\cdots$	r_{i2}	$\cdots$	q_2
Y	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$	$\cdots$	
	y_j	r_{1j}	r_{2j}	$\cdots$	r_{ij}	$\cdots$	q_j
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$	$\cdots$	
		p_1	p_2	$\cdots$	p_i	$\cdots$	

- Se observă că probabilităţile aferente celor două variabile pot fi obţinute adunând probabilităţile din repartiţia comună pe linii (pentru Y) respectiv pe coloane (pentru X):

$$\sum_i r_{ij} = q_j, \forall\, j \quad \text{şi} \quad \sum_j r_{ij} = p_i, \forall\, i.$$

Repartiţii comune - exemplu

Exemplu. Se dau două urne: U_1 care conţine două bile albe, două negre şi trei bile roşii şi U_2 care conţine trei bile albe, două negre şi o bilă roşie. Din prima urnă se extrage o bilă care se introduce în cea de-a doua urnă, iar apoi se extrage o bilă din cea de a doua urnă. Se notează cu X numărul de bile albe obţinute şi cu Y numărul de bile negre obţinute.

(a) Să se determine repartiţia comună a variabilelor X şi Y.

(b) Să se determine repartiţia şi apoi media variabilei $X + Y$.

Soluţie: Observăm că variabilele X şi Y sunt dependente: sunt legate prin relaţia $X + Y \leqslant 2$. Notăm cu A_i evenimentul "a i-a bilă extrasă este albă", cu B_i evenimentul "a i-a bilă extrasă este neagră" şi cu C_i evenimentul "a i-a bilă extrasă este roşie" ($i = \overline{1, 2}$).

Repartiţii comune - exemplu

		$X=0$	$X=1$	$X=2$	
Y	0	6/49	11/49	8/49	25/49
	1	?	?	0	?
	2	?	0	0	?
		?	?	8/49	

Covarianţa a două variabile

Definiţia 2

Fie X şi Y două variabile aleatoare discrete, care admit medie fiecare.

(i) Covarianţa *celor două variabile (dacă există) este definită prin*

$$cov[X, Y] = \mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}[X])(Y - \mathbb{E}[Y])\right] =$$

$$= \sum_{i,j} (x_i - \mathbb{E}[X])(y_j - \mathbb{E}[Y]) P\{X = x_i \cap Y = y_j\}.$$

(ii) Corelaţia *sau* coeficientul de corelaţie *a celor două variabile (dacă au dispersii nenule) este*

$$\rho(X, Y) = \frac{cov[X, Y]}{StDev[X] StDev[Y]}.$$

Repartiţia comună şi covarianţa - exemplu

Exemplu. Se dau două urne: U_1 care conţine două bile albe, două negre şi trei bile roşii şi U_2 care conţine trei bile albe, două negre şi o bilă roşie. Din prima urnă se extrage o bilă care se introduce în cea de-a doua urnă, iar apoi se extrage o bilă din cea de a doua urnă. Se notează cu X numărul de bile albe obţinute şi cu Y numărul de bile negre obţinute.

(a) Să se determine repartiţia comună a variabilelor X şi Y.

(b) Să se determine repartiţia şi apoi media variabilei XY.

(c) Să se determine covarianţa şi corelaţia celor două variabile.

Soluţie: Observăm că variabilele X şi Y sunt legate prin relaţia $X + Y \leqslant 2$. Notăm cu A_i evenimentul "a i-a bilă extrasă este albă", cu B_i evenimentul "a i-a bilă extrasă este neagră" şi cu C_i evenimentul "a i-a bilă extrasă este roşie" ($i = \overline{1,2}$).

Repartiţia comună şi covarianţa - exemplu

		X			
		0	1	2	
Y	0	6/49	11/49	8/49	25/49
	1	?	?	0	?
	2	?	0	0	?
		?	?	8/49	

Covarianţa a două variabile

Propoziţia 1

Fie X şi Y două variabile aleatoare discrete care admit medii şi covarianţă. Atunci

(i) $cov[X, Y] = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]$.

(ii) $Var[X + Y] = Var[X] + 2cov[X, Y] + Var[Y]$.

(iii) $-1 \leqslant \rho[X, Y] = \rho[Y, X] \leqslant 1$ *şi* $\rho[X, X] = 1$ *(i. e.,* $cov[X, X] = Var[X]$*)*.

(iv) *(exerciţiu)* $\rho[aX + b, Y] = sgn(a) \cdot \rho[X, Y]$, *dacă* $a \in \mathbb{R}^*$, $b \in \mathbb{R}$.

(v) $cov[aX + bY + c, Z] = a \cdot cov[X, Z] + b \cdot cov[Y, Z]$, *pentru* $a, b, c \in \mathbb{R}$.

(vi) *(exerciţiu)* $cov\left[\sum_{i=1}^{n} X_i, \sum_{j=1}^{m} Y_j\right] = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} cov[X_i, Y_j]$.

Covarianţa a două variabile

dem.: Pentru relaţia (i)

$$cov[X, Y] = \mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}[X])(Y - \mathbb{E}[Y])\right] =$$

$$= \mathbb{E}\left[XY - \mathbb{E}[Y]X - \mathbb{E}[X]Y + \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]\right] =$$

$$= \mathbb{E}[XY] - 2\mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y] + \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y] = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y].$$

Pentru cea de-a doua relaţie

$$Var[X + Y] = \mathbb{E}\left[(X + Y)^2\right] - \mathbb{E}^2[X + Y] =$$

$$= \mathbb{E}\left[X^2 + 2XY + Y^2\right] - \left(\mathbb{E}^2[X] + 2\mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y] + \mathbb{E}^2[Y]\right) =$$

$$= \left(\mathbb{E}\left[X^2\right] - \mathbb{E}^2[X]\right) + 2\left(\mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]\right) +$$

$$+ \left(\mathbb{E}\left[Y^2\right] - \mathbb{E}^2[Y]\right) = Var[X] + 2cov[X, Y] + Var[Y].$$

Covarianţa a două variabile

În continuare, pentru (iii), deoarece $0 \leqslant Var[tX + Y] = t^2 Var[X] + 2t \cdot cov[X, Y] + Var[Y]$, pentru orice $t \in \mathbb{R}$, trebuie ca discriminantul acestei ecuaţii de gradul doi să fie mai mic sau egal cu zero:

$$\Delta = 4cov^2[X, Y] - 4 Var[X] Var[Y] \leqslant 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |cov[X, Y]| \leqslant StDev[X] \cdot StDev[Y].$$

Apoi, $cov[X, X] = \frac{1}{2} (Var[2X] - 2 Var[X]) = Var[X]$.

Proprietatea (v):

$$cov[aX + bY + c, Z] = \mathbb{E}[aXZ + bYZ + cZ] - \mathbb{E}[aX + bY + c] \cdot \mathbb{E}[Z] =$$

$$= a\mathbb{E}[XZ] + b\mathbb{E}[YZ] + c\mathbb{E}[Z] - (a\mathbb{E}[X] + b\mathbb{E}[Y] + c) \cdot \mathbb{E}[Z]. \blacksquare$$

Covarianţa a două variabile - exemplu

Exemplu. Fie X_1, Y_1 şi X_2, Y_2 două perechi de variabile aleatoare având următoarele tablouri de repartiţie comună:

		X_1: 1	X_1: 2	
Y_1	2	1/4	1/4	1/2
	4	1/4	1/4	1/2
		1/2	1/2	

		X_2: 1	X_2: 2	
Y_2	2	1/2	0	1/2
	4	0	1/2	1/2
		1/2	1/2	

Arătaţi că $\rho[X_1, Y_1] \neq \rho[X_2, Y_2]$ şi $cov[X_1, Y_1] \neq cov[X_2, Y_2]$.

Covarianţa a două variabile - exemplu

Soluţie: Deoarece, după cum se observă din tablourile de mai sus, X_1 şi X_2 (Y_1 şi Y_2) au aceeaşi repartiţie, $StDev[X_1] = StDev[X_2]$ şi $StDev[Y_1] = StDev[Y_2]$, va fi deci suficient să arătăm: $cov[X_1, Y_1] \neq cov[X_2, Y_2]$.

$$\mathbb{E}[X_1] = \mathbb{E}[X_2] = 1 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{2}, \mathbb{E}[Y_1] = \mathbb{E}[Y_2] = 2 \cdot \frac{1}{2} + 4 \cdot \frac{1}{2} = 3.$$

Determinăm media variabilei $X_1 Y_1$ şi apoi covarianţa variabilelor X_1 şi Y_1:

$$X_1 Y_1 : \begin{pmatrix} 2 & 4 & 8 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbb{E}[X_1 Y_1] = 2 \cdot \frac{1}{4} + 4 \cdot \frac{1}{2} + 8 \cdot \frac{1}{4} = \frac{9}{2},$$

$$cov[X_1, Y_1] = \mathbb{E}[X_1 Y_1] - \mathbb{E}[X_1]\mathbb{E}[Y_1] = \frac{9}{2} - \frac{9}{2} = 0.$$

Covarianţa a două variabile - exemplu

Apoi determinăm media variabilei $X_2 Y_2$ şi covarianţa variabilelor X_2 şi Y_2:

$$X_2 Y_2 : \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbb{E}[X_2 Y_2] = 2 \cdot \frac{1}{2} + 8 \cdot \frac{1}{2} = 5,$$

de unde

$$cov[X_2, Y_2] = \mathbb{E}[X_2 Y_2] - \mathbb{E}[X_2]\mathbb{E}[Y_2] = 5 - \frac{9}{2} = \frac{1}{2}. \clubsuit$$

Variabile aleatoare independente

Definiţia 3

Două variabile aleatoare X şi Y se numesc independente *dacă, pentru orice două mulţimi de valori A şi B, a lui X, respectiv Y, avem*

$$P\{(X \in A) \cap (Y \in B)\} = P\{X \in A\} \cdot P\{Y \in B\}.$$

Deoarece $P\{X = x_i \cap Y = y_j\} = P\{X = x_i\} \cdot P\{Y = y_j\} = p_i \cdot q_j$, în acest caz, repartiţia comună poate fi calculată mai simplu: $r_{ij} = p_i q_j$.

Teorema 3.1

Fie X şi Y variabile aleatoare discrete independente. Atunci:

(i) $\mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]$.

(ii) $Var[X + Y] = Var[X] + Var[Y]$.

(iii) $cov[X, Y] = 0$.

Variabile aleatoare independente

dem.: Vom considera, ca şi mai sus, doar cazul în care variabilele sunt amândouă finite. Pentru (i):

$$\mathbb{E}[XY] = \sum_z zP\{XY = z\} = \sum_z z \cdot \left(\sum_{z = x_i y_j} P\{X = x_i \cap Y = y_j\} \right) =$$

$$= \sum_{i,j} x_i y_j P\{X = x_i \cap Y = y_j\} = \sum_{i,j} x_i y_j P\{X = x_i\} P\{Y = y_j\} =$$

$$= \left(\sum_i x_i P\{X = x_i\} \right) \cdot \left(\sum_j y_j P\{Y = y_j\} \right) = \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y].$$

Variabile aleatoare independente

Din această relaţie rezultă, în particular, (iii): $cov[X, Y] = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y] = 0$.

Pentru (ii) folosim Propoziţia 1 sau procedăm direct:

$$Var[X+Y] = \mathbb{E}\left[(X+Y)^2\right] - (\mathbb{E}[X+Y])^2 =$$

$$= \mathbb{E}\left[X^2 + 2XY + Y^2\right] - (\mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y])^2 =$$

$$= \mathbb{E}\left[X^2\right] + 2\mathbb{E}[XY] + \mathbb{E}\left[Y^2\right] - \mathbb{E}^2[X] - 2\mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y] - \mathbb{E}^2[Y] =$$

$$= \mathbb{E}\left[X^2\right] - \mathbb{E}^2[X] + \mathbb{E}\left[Y^2\right] - \mathbb{E}^2[Y] = Var[X] + Var[Y]. \blacksquare$$

Reciproca acestei teoreme nu este neapărat adevărată.

Variabile aleatoare independente - exemplu

Exemplu. Se aruncă două zaruri. Să se determine media produsului şi dispersia sumei.
Soluţie: Fie X_1 şi X_2 rezultatele de pe cele două zaruri. Aceste două variabile sunt independente (dar şi identic repartizate), deci

$$\mathbb{E}[X_1 X_2] = \mathbb{E}[X_1]\mathbb{E}[X_2] = \frac{49}{4} \text{ şi}$$

$$Var[X_1 + X_2] = Var[X_1] + Var[X_2]. \clubsuit$$

Exerciţii pentru seminar

- Repartiţia negativă binomială: I.1, I.3, I.4
- Repartiţii comune: II.2, II.4, II.7, II.8, II.11, II.15
- Rezervă: I. 2, II.9, II.10, II.12

Exerciţii - repartiţia negativă binomială

I.1. Un zar se aruncă până se obţine de patru ori câte o faţă pară.

(a) Care este probabilitatea ca numărul de feţe impare care apar în timpul acestor aruncări să fie egal cu şase?

(b) Care este numărul mediu de feţe impare care apar?

I.2. Se extrag cărţi dintr-un pachet de cărţi de joc cu întoarcere până se obţin cinci trefle.

(a) Care este probabilitatea ca în timpul acestor extrageri să obţinem cinci cărţi care nu sunt trefle?

(b) Care este numărul mediu de cărţi care nu sunt trefle extrase?

Exerciţii - repartiţia negativă binomială

I.3. Se aruncă două zaruri până când se obţin patru duble.

(a) Care este probabilitatea de a avea nevoie de exact zece aruncări ale celor două zaruri?

(b) Care este numărul mediu de aruncări ale celor două zaruri?

I.4. într-o urnă avem trei bile numerotate cu 0, două numerotate cu 1 şi patru numerotate cu 2. Se extrag câte două bile cu întoarcere din această urnă până când se obţin trei sume egale cu 2.

(a) Care este probabilitatea de a avea nevoie de unsprezece astfel de extrageri a câte două bile?

(b) Care este numărul mediu de sume diferite de 2? Care este numărul mediu de extrageri a câte două bile?

Exerciţii - repartiţii comune

II.1. Demonstraţi că (X, Y şi Z sunt variabile aleatoare)

(a) $cov[aX + bY + c, Z] = a \cdot cov[X, Z] + b \cdot cov[Y, Z], \forall a, b, c \in \mathbb{R}$.

(b) $cov\left[\sum_{i=1}^{n} X_i, \sum_{j=1}^{m} Y_j\right] = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} cov[X_i, Y_j]$, pentru orice variabile aleatoare $(X_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ şi $(Y_i)_{1\leqslant j\leqslant m}$ (inducţie).

(c) $Var\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \sum_{i=1}^{n} Var[X_i] + 2\sum_{i<j} cov[X_i, X_j]$, pentru orice variabile aleatoare $X_1, X_2, \ldots, X_n$.

II.2. Fie X variabila de mai jos şi $Y = X^2$. Arătaţi că X şi Y nu sunt independente dar $cov[X, Y] = 0$.

$$X : \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0.25 & 0.5 & 0.25 \end{pmatrix}$$

Exerciţii - repartiţii comune

II.3. Să presupunem că X şi Y au următoarea repartiţie comună

		Y: -3	2	4
X	1	0.2	?	0.2
	3	0.3	0.05	0.05

(a) Determinaţi repartiţiile individuale ale variabilelor X şi Y.

(b) Calculaţi $cov[X, Y]$ şi $\rho[X, Y]$.

(c) Sunt X şi Y independente?

Exerciţii - repartiţii comune

II.4. O monedă este aruncată de trei ori. Fie X o variabilă egală cu 1 dacă apare stema şi 0 dacă apare banul la prima aruncare, iar Y o variabilă egală cu numărul de apariţii ale stemei. Determinaţi:

(a) Repartiţia comună acelor două variabile.

(b) Repartiţiile individuale ale lui X şi Y şi covarianţa lor.

II.5. Fie X o variabilă aleatoare cu următoarea distribuţie şi $Y = X^2$

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 & 2 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{3}{8} \end{pmatrix}.$$

Determinaţi

(a) Repartiţia lui Y şi repartiţia comună acelor două variabile.

(b) Covarianţa şi corelaţia celor două variabile.

Exerciţii - repartiţii comune

II.6. Fie X şi Y două variabile aleatoare independente cu următoarele distribuţii

$$X : \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0.6 & 0.4 \end{pmatrix}, Y : \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0.2 & 0.5 & 0.3 \end{pmatrix}.$$

(a) Determinaţi repartiţia comună a celor două variabile şi covarianţa lor.

(b) Determinaţi repartiţia şi media variabilei $X + Y$.

II.7. Într-o urnă sunt trei bile roşii şi cinci bile negre. Se extrage din urnă o bilă şi se înlocuieşte cu o bilă de culoare diferită. Apoi se extrage încă o bilă. Se notează cu X numărul de bile roşii şi cu Y numărul de bile negre extrase.

(a) Să se determine repartiţia comună a variabilelor X şi Y.

(b) Variabilele X şi Y sunt independente?

Exerciţii - repartiţii comune

II.8. Într-o urnă sunt patru bile albe (două numerotate cu 1 şi două numerotate cu 2) şi trei bile negre (două numerotate cu 1 şi una numerotată cu 2). Din urnă se extrag succesiv şi fără întoarcere două bile. Fie X numărul de bile albe obţinute şi Y numărul de bile numerotate cu 2.

(a) Să se determine repartiţia comună a variabilelor X şi Y.

(b) Variabilele X şi Y sunt independente?

II.9. O monedă se aruncă de trei ori. Se notează cu X numărul de steme care apar la primele două aruncări şi cu Y numărul de steme care apar la ultima aruncare. Să se determine

(a) repartiţiile variabilelor X şi Y.

(b) repartiţia comună a variabilelor X şi Y. (Sunt X şi Y independente?)

(c) repartiţia variabilei $X + Y$.

Exerciţii - repartiţii comune

II.10. Variabilele X şi Y au repartiţia comună dată mai jos.

		X			
		-1	1	2	3
Y	-1	0	$1/36$	$1/6$	$1/12$
	0	$1/18$	0	$1/18$	0
	1	0	$1/36$	$1/6$	$1/12$
	2	$1/12$	0	$1/12$	?

(a) Să se calculeze $P(X \geqslant 2 \text{ şi } Y \leqslant 0)$.

(b) Sunt variabilele X şi Y independente?

(c) Să se determine repartiţia variabilei $X + Y$.

Exerciţii - repartiţii comune

II.11. Într-un meci de tenis dintre doi jucători P_1 şi P_2, învinge cel care câştigă primul două seturi. P_1 câştigă fiecare set, independent, cu probabilitatea $1/3$. Notăm cu X numărul de seturi jucate de P_1 până la sfârşitul meciului şi cu Y numărul de seturi câştigate de P_2. Să se determine

(a) repartiţia comună a celor două variabile;

(b) covarianţa celor două variabile; sunt cele două variabile independente?

II.12. Probabilitatea de a apărea stema la aruncarea unei monezi este $1/3$. Moneda este aruncată de trei ori. Se notează cu X numărul de apariţii ale banului şi cu Y numărul maxim de apariţii consecutive ale stemei. Să se determine

(a) repartiţia comună acelor două variabile;

(b) covarianţa celor două variabile; sunt cele două variabile independente?

Exerciţii - repartiţii comune

II.13. Un zar este aruncată de trei ori. X este variabila care notează de câte ori apare un număr par, iar Y notează de câte ori apare un număr prim. Să se determine

(a) repartiţia comună acelor două variabile;

(b) covarianţa celor două variabile; sunt cele două variabile independente?

II.14. Într-o urnă sunt 5 bile albe şi 4 bile roşii. Se extrage din urnă o bilă şi se înlocuieşte cu o bilă de culoare opusă. Apoi se extrage încă o bilă. Se notează cu X numărul de bile albe şi cu Y numărul de bile roşii extrase. Să se determine

(a) repartiţia comună acelor două variabile; prin ce relaţie sunt legate cele două variabile?

(b) covarianţa celor două variabile; sunt cele două variabile independente?

Exerciţii - repartiţii comune

II.15. Într-o urnă sunt 3 bile negre şi 5 bile verzi. Se extrage o bilă din urnă şi, dacă bila este neagră, ea este pusă la loc împreună cu o bilă verde, iar dacă este verde se înlocuieşte cu două bile de culoare neagră. Apoi se extrage încă o bilă. Fie X numărul de bile negre şi Y numărul de bile verzi extrase. Determinaţi

(a) repartiţia comună a celor două variabile;

(b) covarianţa celor două variabile; X şi Y sunt independente?

II.16. Se dau două urne: una conţine 2 bile albe şi 2 bile negre, iar cealaltă o bilă albă şi 2 bile negre. Se aruncă un zar, dacă apare un multiplu de 3, se extrage o bilă din prima urnă, altfel, se extrage o bilă din a doua urnă. Fie X numărul de bile albe rămase în prima urnă şi Y numărul de bile negre din a doua urnă. Să se determine

(a) repartiţia comună a celor două variabile;

(b) covarianţa celor două variabile; X şi Y sunt independente?

Bibliography

- Bertsekas, D. P., J. N. Tsitsiklis, *Introduction to Probability*, Athena Scietific, 2002.
- Hoeffding, W., *Probability inequalities for sums of bounded random variables*, J. of the Amer. Statistical Assoc. vol. 58, issue 301, pp. 13-30, 1963.
- Lipschutz, S., *Theory and Problems of Probability*, Scahaum's Outline Series, McGraw-Hill, 1965.
- Ross, S. M., *A First Course in Probability* , Prentice Hall, 5th edition, 1998.
- Stone, C. J., *A Course in Probability and Statistics*, Duxbury Press, 1996.