



## Table of contents

### 1 Probabilitatea condiționată și evenimente independente

- Introducere
- Probabilitate condiționată
- Evenimente independente
- Independență condiționată

### 2 Formule probabilistice

- Formula probabilității totale
- Formula lui Bayes

### 3 Exerciții

- Probabilitate condiționată și independență
- Formule probabilistice

### 4 Bibliography

## Probabilitatea condiționată și independență

- În acest capitol analizăm modul în care un eveniment aleator, despre care știm deja că s-a realizat, influențează sau nu șansele de realizare ale unor alte evenimente.
- Noțiunile de condiționare și independență permit calcularea probabilităților unor evenimente aleatoare prin intermediul altora.
- Aceste noțiuni sunt printre cele mai importante concepte ale teoriei probabilităților.
- În lipsa acestor două noțiuni teoria probabilităților ar fi doar o teorie despre măsură a submulțimilor unei mulțimi  $\Omega$ .

## Probabilitatea condiționată și independență

### *Exemplu:*

- Să presupunem că se aruncă două zaruri și că putem observa valoarea primului dintre zaruri: 5. Având la îndemână această informație, care este probabilitatea ca suma celor două zaruri să fie cel mult 7?
- Raționamentul este următorul: știind ca primul dintre zaruri este 5, rezultatele posibile a experimentului sunt  $(5, 1)$ ,  $(5, 2)$ ,  $(5, 3)$ ,  $(5, 4)$ ,  $(5, 5)$  și  $(5, 6)$ .
- În continuare, cunoscând că valoarea primului zar este 5, fiecare dintre aceste evenimente elementare are aceeași probabilitate:  $1/6$ ; probabilitatea căutată este  $2/6$ . ♣

## Probabilitate condiționată

### Definiția 1

Fie  $A$  și  $B$  două evenimente aleatoare, **probabilitatea condiționată** de a se realiza  $A$  știind că s-a realizat  $B$  este

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, (B \neq \emptyset).$$

$P(A|B)$  se mai numește **probabilitatea lui  $A$  condiționat de evenimentul  $B$** .  $A$  este **evenimentul condiționat**, iar  $B$  este **evenimentul care condiționează**.

*Exemplu.* Două cifre sunt alese la întâmplare dintre cele nouă cifre de la 1 la 9. Dacă suma este pară, care este probabilitatea ca unul dintre cele două numere să fie par?

*Soluție:* Numerele pare sunt  $\{2, 4, 6, 8\}$ ; dacă suma este pară și unul dintre numere este par, atunci amândouă sunt pare.

## Probabilitate condiționată

Există  $\binom{4}{2} = 6$  moduri de a alege două numere pare diferite și  $\binom{5}{2} = 10$  moduri de a alege două numere impare diferite (numerele impare sunt  $\{1, 3, 5, 7, 9\}$ ). Probabilitatea este

$$\frac{\binom{4}{2}}{\binom{4}{2} + \binom{5}{2}} = \frac{6}{6 + 10} = 0.375. \clubsuit$$

*Exemplu.* Într-o urnă sunt 4 bile albe (două numerotate cu 1, două cu 2), 5 galbene (trei numerotate cu 1, două cu 2) și 6 negre (două numerotate cu 1, patru cu 2). O bilă este extrasă la întâmplare din urnă.

## Probabilitate condiționată

- (a) Dacă bila extrasă nu este neagră, care este probabilitatea ca ea să fie albă?
- (b) Dacă bila extrasă are numărul 2, care este probabilitatea ca ea să nu fie albă?

*Soluție:*

- (a) Dacă bila extrasă nu este neagră, rămân nouă bile posibile, iar dintre acestea patru sunt albe. Probabilitatea este  $4/9$ .
- (b) Dacă bila extrasă are numărul 2, spațiul posibilităților se restrânge la două bile albe, două bile galbene și patru bile negre (putem presupune că urna are acest conținut). Probabilitatea de a extrage o bilă galbenă sau neagră este  $6/8 = 0.75$ . ♣

## Probabilitate condiționată

*Example.* O monedă se aruncă de trei ori. Vrem să determinăm probabilitatea condiționată  $P(A|B)$ , unde  $A$  = "banul apare de mai multe ori decât stema",  $B$  = "la prima aruncare se obține banul".

*Solution:* Spațiul de selecție este

$$\Omega = \{bbb, bbs, bsb, bss, sbb, sbs, ssb, sss\}.$$

Astfel,  $B = \{bbb, bbs, bsb, bss\}$ ,  $A = \{bbb, bbs, bsb, sbb\}$ ,  $A \cap B = \{bbb, bbs, bsb\}$ .

$$P(B) = \frac{4}{8}, P(A \cap B) = \frac{3}{8}, P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{3}{4}.$$

Deoarece toate rezultatele sunt echiprobabile putem calcula  $P(A|B)$  mai rapid. Putem evita să calculăm  $P(B)$  și  $P(A \cap B)$  împărțind numărul de rezultate elementare din  $A \cap B$  (care este 3) la numărul de rezultate elementare ale lui  $B$  (care este 4).

## Evenimente independente

- În multe cazuri probabilitatea  $P(A|B)$  este diferită de  $P(A)$  - care este probabilitatea necondiționată a evenimentului  $A$ . Asta înseamnă că realizarea evenimentului  $B$  influențează într-adevăr șansele de producere a evenimentului  $A$ .
- Atunci când  $P(A) = P(A|B)$  putem spune că evenimentul  $A$  este independent de  $B$  (vom vedea că relația aceasta este simetrică). Altfel spus,  $A$  este independent de  $B$  dacă realizarea evenimentului  $B$  nu schimbă probabilitatea realizării evenimentului  $A$ .

### Definiția 2

Două evenimente  $A$  și  $B$  se numesc **independente** dacă

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) \quad (1)$$

## Evenimente independente

- Dacă  $B$  este un eveniment posibil (adică  $P(B) > 0$ ) și  $P(A|B) = P(A)$ , atunci  $A$  și  $B$  sunt independente conform definiției (care include și posibilitatea ca unul dintre cele două evenimente să fie imposibil).
- În fapt, evenimentul imposibil,  $\emptyset$ , este independent de orice alt eveniment; la fel, evenimentul sigur,  $\Omega$ , este independent de orice alt eveniment.
- Independența se poate verifica folosind ecuația (1), dar există și situații în care aceasta rezultă direct din enunțul problemei pe baza independenței "fizice" a celor două evenimente aleatoare, așa cum arată următorul exercițiu.

## Evenimente independente - exemple

*Exemplu.* Se aruncă două zaruri; fie  $A =$ " primul zar are un număr par" și  $B =$ "al doilea zar este cel puțin trei". Să se arate că cele două evenimente sunt independente.

*Soluție:* Intuitiv, cele două evenimente sunt independente deoarece rezultatul obținut pe un zar nu are vreo legătură cu cel de-al doilea (aruncarea primului zar poate fi făcută înaintea celui de-al doilea!). Chiar fără a calcula probabilitățile implicate în ecuația (1) putem spune că  $A$  și  $B$  sunt independente. ♣

- În anumite situații însă această independență fizică nu există și intuiția nu funcționează - nu putem afirma independența înainte de a calcula probabilitățile implicate.
- Următoarele exemple subliniază acest lucru.

## Evenimente independente - exemple

*Exemplu.* Considerăm un pachet de (52 de) cărți de joc din care se extrage la întâmplare o carte. Fie  $A$  = "cartea extrasă este un zece" și  $B$  = "cartea extrasă este caro". Să se arate că cele două evenimente sunt independente.

*Soluție:*  $P(A) = \frac{4}{52}$ ,  $P(B) = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}$ , iar  $P(A \cap B) = \frac{1}{52}$  și  $P(A) \cdot P(B) = \frac{52}{52 \cdot 52} = \frac{1}{52}$ . ♣

*Exemplu.* Într-o urnă sunt puse următoarele cărți: un valet de treflă, o damă de caro, un trei de pică și un opt de inimă. O carte este extrasă la întâmplare din această urnă; fie  $A$  = "cartea extrasă are culoare roșie" și  $B$  = "cartea extrasă este o figură". Să se analizeze independența evenimentelor  $A$  și  $B$ .

*Soluție:* Nici în acest caz independența nu se poate afirma direct;  $P(A) = P(B) = \frac{1}{2}$ ,  $P(A \cap B) = \frac{1}{4}$ , de aici rezultă independența. ♣

## Evenimente independente

### Propoziția 1

*Dacă evenimentele  $A$  și  $B$  sunt independente, atunci la fel sunt și perechile de evenimente  $(A, \overline{B})$ ,  $(\overline{A}, B)$  și  $\overline{A}, \overline{B}$ .*

proof: Știm că  $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ ; considerăm doar prima pereche (pentru celelalte e similar):  $P(A) \cdot P(\overline{B}) = P(A) \cdot [1 - P(B)] = P(A) - P(A \cap B) = P(A \setminus B) = P(A \cap \overline{B})$  ■

### Definiția 3

*Evenimentele aleatoare  $(A_i)_{i \in I}$  se numesc **independente în ansamblu** dacă*

$$P\left(\bigcap_{j=1}^k A_{i_j}\right) = P(A_{i_1}) \cdot P(A_{i_2}) \cdot \dots \cdot P(A_{i_k}),$$

*pentru orice  $\{i_1, i_2, \dots, i_k\} \subseteq I$ , unde  $k \in \mathbb{N}$ ,  $k \geq 2$ .*

## Evenimente independente în ansamblu

### Propoziția 2

*Dacă evenimentele  $(A_i)_{i \in I}$  sunt independente în ansamblu și  $(I_1, I_2)$  este o partiție a lui  $I$ , atunci evenimentele  $(A_i)_{i \in I_1} \cup (\bar{A}_i)_{i \in I_2}$  sunt de asemeni independente în ansamblu.*

proof: (Schiță) Este suficient să demonstrăm propoziția pentru mulțimi  $I$  finite. Utilizăm Propoziția 1 și proprietatea: dacă  $A_1, A_2, \dots, A_k, A_{k+1}$  sunt independente în ansamblu, atunci și  $A_1, A_2, \dots, A_k \cap A_{k+1}$  sunt independente în ansamblu. Demonstrația este prin inducție după  $|I|$ . ■

- Independența în ansamblu este o condiție foarte tare și ea se verifică destul de rar în practică.
- De cele mai multe ori independența în ansamblu este validată cel mai ușor sesizând independența "fizică" (datorată eventual unui experiment aleator secvențial).

## Independență condiționată

### Propoziția 3

*Probabilitățile condiționate de un eveniment aleator particular,  $A$ , definesc o funcție de probabilitate pe un nou spațiu,  $A$ .*

proof: (Schiță) Fie  $A$  un eveniment aleator particular posibil, definim  $Q : \mathcal{P}(A) \rightarrow [0, 1]$  prin  $Q(B) = P(B|A)$ , pentru orice  $B \subseteq A$ . Verificarea faptului că funcția  $Q$  satisface cele trei axiome ale probabilității este lăsată ca exercițiu. ■

### Definiția 4

*Fie  $C \neq \emptyset$ , evenimentele aleatoare  $A$  și  $B$  sunt **independente condiționat** de  $C$  dacă  $P(A \cap B|C) = P(A|C) \cdot P(B|C)$ .*

## Independență condiționată

### Propoziția 4

*Fie  $C \neq \emptyset$ , dacă  $B \cap C \neq \emptyset$ , atunci evenimentele aleatoare  $A$  și  $B$  sunt independente condiționat de  $C$  dacă și numai dacă  $P(A|B \cap C) = P(A|C)$ .*

proof:

$$\begin{aligned} P(A \cap B|C) &= \frac{P(A \cap B \cap C)}{P(C)} = \frac{P(B \cap C) \cdot P(A \cap B \cap C)}{P(B \cap C) \cdot P(C)} = \\ &= \frac{P(B \cap C)}{P(C)} \cdot \frac{P(A \cap B \cap C)}{P(B \cap C)} = P(B|C) \cdot P(A|B \cap C). \end{aligned}$$

Acum,  $A$  și  $B$  sunt independente condiționat de  $C$  dacă și numai dacă  $P(B|C) \cdot P(A|B \cap C) = P(A|C) \cdot P(B|C)$ , i. e.,  $P(A|B \cap C) = P(A|C)$ .



## Independență condiționată

- Relația  $P(A|C \cap B) = P(A|C)$  spune că, dacă se știe că  $C$  s-a produs deja, atunci informația suplimentară că și  $B$  s-a produs nu schimbă probabilitatea evenimentului  $A$ .
- Independența necondiționată a două evenimente aleatoare  $A$  și  $B$  nu are neapărat drept consecință independența condiționată și nici invers.

## Formula probabilității totale

### Propoziția 5

*(Formula probabilității totale) Fie  $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$  evenimente aleatoare care realizează o partiție a evenimentului sigur ( $\bigcup_{i=1}^n A_i = \Omega$  și  $A_i \cap A_j = \emptyset, \forall i \neq j$ ). Dacă  $B$  este un eveniment oarecare, atunci*

$$P(B) = \sum_{i=1}^n P(A_i) \cdot P(B|A_i),$$

*dacă toate evenimentele care condiționează sunt posibile.*

$$\begin{aligned} \text{dem: } P(B) &= P(B \cap \Omega) = P\left[B \cap \left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right)\right] = P\left[\bigcup_{i=1}^n (B \cap A_i)\right] \\ &= \sum_{i=1}^n P(B \cap A_i) = \sum_{i=1}^n P(A_i) \cdot P(B|A_i). \end{aligned}$$

## Formula probabilității totale - exemple

*Exemplu.* Urna  $U_1$  conține trei bile albe și cinci bile negre, iar urna  $U_2$  patru bile albe și șase bile negre. Se extrage o bilă dintr-una din urne aleasă la întâmplare (urnele sunt identice la exterior). Care este probabilitatea ca bila să fie albă?

*Soluție:* Notăm  $A_i$  = "extragerea se face din urna  $U_i$ " ( $i = \overline{1,2}$ ) și  $B$  = "bila extrasă este albă".  $A_1 \cup A_2 = \Omega$ ,  $A_1 \cap A_2 = \emptyset$  și putem presupune că  $P(A_1) = P(A_2) = 1/2$ . Atunci

$$P(B) = P(A_1) \cdot P(B|A_1) + P(A_2) \cdot P(B|A_2), \text{ iar}$$

$$P(B|A_1) = \frac{3}{8}, \quad P(B|A_2) = \frac{4}{10}, \text{ deci}$$

$$P(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{8} + \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{10} = \frac{31}{80} \spadesuit$$

## Formula probabilității totale - exemple

*Example.* Se aruncă un zar. Dacă rezultatul este 1 sau 2, zarul mai este aruncat o dată. Care este probabilitatea ca suma totală aruncărilor (sau aruncării) să fie cel puțin 4?

*Soluție:* Fie  $A_i =$  "rezultatul primei aruncări este  $i$ " ( $i = \overline{1,6}$ ) și  $B =$  "suma totală este cel puțin 4".  $\bigcup_{i=1}^6 A_i = \Omega$ ,  $A_i \cap A_j = \emptyset$ ,  $\forall i \neq j$  și  $P(A_i) = 1/6$ .

Avem  $P(B) = \sum_{i=1}^6 P(A_i) \cdot P(B|A_i)$ . Dat evenimentul  $A_1$ , suma totală va fi cel puțin 4 dacă la a doua aruncare obținem cel puțin 3; dat evenimentul  $A_2$ , suma totală va fi cel puțin 4 dacă la a doua aruncare obținem cel puțin 2:

$$P(B|A_1) = \frac{4}{6}, \quad P(B|A_2) = \frac{5}{6}, \quad P(B|A_3) = 0, \quad P(B|A_i) = 1, \quad i = \overline{4,6}$$

$$P(B) = \frac{1}{6} \cdot \left( \frac{4}{6} + \frac{5}{6} + 1 + 1 + 1 \right) = \frac{27}{36} \cdot \clubsuit$$

## Formula lui Bayes

### Propoziția 6

(*Formula lui Bayes*) Fie  $A_1, A_2, \dots, A_n$  evenimente aleatoare care realizează o partiție a evenimentului sigur și  $B$  un eveniment oarecare, atunci

$$P(A_k|B) = \frac{P(A_k) \cdot P(B|A_k)}{\sum_{i=1}^n P(A_i) \cdot P(B|A_i)},$$

dacă toate evenimentele care condiționează sunt posibile. ( $P(B|A_k)$  se numesc *probabilități a priori*, iar  $P(A_k|B)$  sunt numite *probabilități a posteriori*.)

$$\begin{aligned} \text{dem: } P(A_k|B) &= \frac{P(A_k \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B|A_k) \cdot P(A_k)}{P(B)} = \\ &= \frac{P(A_k) \cdot P(B|A_k)}{\sum_{i=1}^n P(A_i) \cdot P(B|A_i)}. \end{aligned}$$

## Formula lui Bayes - exemple

*Exemplu.* Într-o urnă sunt patru zaruri: unul are numărul 3 pe exact patru dintre fețe, două au numărul 3 pe exact trei dintre fețe iar ultimul zar este normal. Un zar este ales la întâmplare și se aruncă o dată.

- (a) Care este probabilitatea ca la aruncarea zarului să apară numărul 3?
- (b) Dacă la aruncarea zarului s-a obținut numărul 3, care este probabilitatea ca zarul ales să fi fost cel normal?

*Soluție:* Notăm  $A_1$  = "zarul ales are numărul 3 pe exact patru dintre fețe",  $A_2$  = "zarul ales are numărul 3 pe exact trei dintre fețe",  $A_3$  = "zarul ales este normal" și  $B$  = "la aruncarea zarului ales apare numărul 3".

## Formula lui Bayes - exemple

$A_1 \cup A_2 \cup A_3 = \Omega$ ,  $A_i \cap A_j = \emptyset$ , pentru orice  $i \neq j$  și  $P(A_1) = P(A_3) = 1/4$ ,  $P(A_2) = 2/4$ .

Probabilitățile a priori sunt

$$P(B|A_1) = \frac{4}{6}, P(B|A_2) = \frac{3}{6}, P(B|A_3) = \frac{1}{6}.$$

(a) Probabilitatea cerută este:

$$P(B) = \sum_{i=1}^3 P(A_i)P(B|A_i) = \frac{1}{4} \cdot \frac{4}{6} + \frac{2}{4} \cdot \frac{3}{6} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{6} = \frac{11}{24}.$$

(b) Probabilitatea a posteriori cerută este

$$P(A_3|B) = \frac{P(A_3) \cdot P(B|A_3)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{6}}{\frac{11}{24}} = \frac{1}{11} \clubsuit$$

## Formula lui Bayes - exemple

*Exemplu.* Se dau două urne; prima conține 3 bile roșii, 2 albastre și 3 negre, iar a doua conține 2 bile albe, 2 albastre și 3 negre. Din prima urnă se extrage o bilă și se pune în cea de-a doua urnă, apoi se extrage o bilă din cea de-a doua urnă.

- (a) Dacă a doua bilă extrasă este neagră care este probabilitatea ca prima să fi fost albastră?
- (b) Dacă a doua bilă extrasă este roșie care este probabilitatea ca prima să fi fost albastră?
- (c) Dacă a doua bilă extrasă este albă care este probabilitatea ca prima să fi fost roșie?

*Soluție:* Notăm  $A_1$  = "prima bilă extrasă este roșie",  $A_2$  = "prima bilă extrasă este albastră",  $A_3$  = "prima bilă extrasă este neagră" și  $B$  = "a doua bilă extrasă este neagră",  $C$  = "a doua bilă extrasă este roșie",  $D$  = "a doua bilă extrasă este albă".

## Formula lui Bayes - exemple

$A_1 \cup A_2 \cup A_3 = \Omega$ ,  $A_i \cap A_j = \emptyset$ , pentru orice  $i \neq j$  și  $P(A_1) = 3/8$ ,  $P(A_2) = 2/8$ ,  $P(A_3) = 3/8$ .

(a) Probabilitățile a priori sunt

$$P(B|A_1) = \frac{3}{8}, P(B|A_2) = \frac{3}{8}, P(B|A_3) = \frac{4}{8}.$$

Aplicăm mai întâi formula probabilității totale:

$$P(B) = \sum_{i=1}^3 P(A_i)P(B|A_i) = \frac{3}{8} \cdot \frac{3}{8} + \frac{2}{8} \cdot \frac{3}{8} + \frac{3}{8} \cdot \frac{4}{8} = \frac{27}{64}.$$

Apoi formula lui Bayes:

$$P(A_2|B) = \frac{P(A_2) \cdot P(B|A_2)}{P(B)} = \frac{\frac{2}{8} \cdot \frac{3}{8}}{\frac{27}{64}} = \frac{6}{27} = \frac{2}{9}.$$

## Formula lui Bayes - exemple

(b) Probabilitățile a priori sunt

$$P(C|A_1) = \frac{1}{8}, P(C|A_2) = 0, P(C|A_3) = 0.$$

Aplicăm mai întâi formula probabilității totale:

$$P(C) = \sum_{i=1}^3 P(A_i)P(C|A_i) = \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{8} + \frac{2}{8} \cdot 0 + \frac{3}{8} \cdot 0 = \frac{3}{64}.$$

Apoi formula lui Bayes:

$$P(A_2|C) = \frac{P(A_2) \cdot P(C|A_2)}{P(C)} = \frac{\frac{2}{8} \cdot 0}{\frac{3}{64}} = 0.$$

## Formula lui Bayes - exemple

(c) Probabilitățile a priori sunt

$$P(D|A_1) = \frac{2}{8}, P(D|A_2) = \frac{2}{8}, P(D|A_3) = \frac{2}{8}.$$

Aplicăm mai întâi formula probabilității totale:

$$P(D) = \sum_{i=1}^3 P(A_i)P(D|A_i) = \frac{3}{8} \cdot \frac{2}{8} + \frac{2}{8} \cdot \frac{2}{8} + \frac{3}{8} \cdot \frac{2}{8} = \frac{16}{64}.$$

Apoi formula lui Bayes:

$$P(A_1|D) = \frac{P(A_1) \cdot P(D|A_1)}{P(D)} = \frac{\frac{3}{8} \cdot \frac{2}{8}}{\frac{16}{64}} = \frac{6}{16} = \frac{3}{8} \spadesuit$$

## Exerciții propuse spre rezolvare pentru seminar

- Probabilitate condiționată și evenimente independente: I.2, I.3, I.6, I.7, I.8, I.15, I.20
- Formula probabilității totale și cea a lui Bayes: II.2, II.5, II.7, II.11
- Rezervă: I.4, I.9, I.20, II.1, II.8



## Exerciții - Probabilitate condiționată și independență

I.1. Se aruncă un zar și se consideră evenimentele  $A =$ "apare una din fețele 1, 2 sau 3" și  $B =$ "apare una din fețele 2, 3, 4 sau 6". Evenimentele  $A$  și  $B$  sunt independente?

I.2. Se aruncă două zaruri și se notează cu  $a_1$  valoarea primului zar și cu  $a_2$  valoarea celui de-al doilea. Să se arate că evenimentele " $a_1 \geq 5$ " și " $a_2 \leq 3$ " sunt independente.

I.3. Un absolvent de liceu trimite cereri de admitere la Oxford și la Cambridge. El știe că Oxford îl va accepta cu probabilitate 0.4, iar Cambridge cu probabilitate 0.3. Știe de asemenea că va fi acceptat de ambele universități cu probabilitate 0.2.

- (a) Care este probabilitatea să fie acceptat de Cambridge dacă se știe că a fost acceptat de Oxford?
- (b) Evenimentele "este acceptat de Oxford" și "este acceptat de Cambridge" sunt compatibile? Dar independente?

## Exerciții - Probabilitate condiționată și independență

I.4. Se aruncă trei monede identice.

- (a) Evenimentele "stema pe prima monedă" și "valoarea pe ultimele două" sunt independente?
- (b) Dar evenimentele "valoarea pe exact două monede" și "valoarea pe toate monedele"?

I.5. Trei sportivi trag asupra unei ținte; primul nimereste ținta cu probabilitatea  $\frac{2}{3}$ , al doilea cu probabilitatea  $\frac{3}{4}$ , iar al treilea cu probabilitatea  $\frac{4}{5}$  (aceste evenimente sunt independente în ansamblu). Care este probabilitatea ca ținta să fie atinsă

- (a) de exact trei ori,
- (b) de exact două ori,
- (c) respectiv, măcar o dată?

## Exerciții - Probabilitate condiționată și independență

I.6. Probabilitatea ca un student să promoveze examenul este  $\frac{2}{5}$ , ca studentul aflat la dreapta lui să promoveze este  $\frac{3}{5}$ , iar ca studentul aflat la stânga să promoveze este  $\frac{1}{5}$ . Presupunem că studenții nu se influențează reciproc în timpul examenului. Care este probabilitatea ca exact doi studenți să promoveze? Dar ca studentul din mijloc să promoveze știind că cel din stânga a promovat?

I.7. O urnă conține 3 bile albe (două numerotate cu 1 și una numerotată cu 2) și 5 bile negre (două numerotate cu 1 și trei numerotate cu 2). Se extrage din urnă o bilă.

- (a) Dacă bila este albă care este probabilitatea ca ea să fie numerotată cu 1?
- (b) Dacă bila este numerotată cu 2 care este probabilitatea ca ea să fie albă?

## Exerciții - Probabilitate condiționată și independență

I.8. O urnă conține 16 bile numerotate de 1 la 16 colorate astfel:  $\underbrace{1, 2, 4, 5, 16}_{\text{albe}}, \underbrace{3, 6, 7, \dots, 13, 14, 15}_{\text{negre}}, \underbrace{\phantom{1, 2, 4, 5, 16}}_{\text{verzi}}$ . Se extrage o bilă din urnă. Se consideră evenimentele  $A$  = "bila extrasă este neagră" și  $B$  = "bila extrasă are un număr mai mare sau egal cu 10".

Să se calculeze probabilitățile evenimentelor  $A|B, A|\bar{B}, \bar{A}|B, \bar{A}|\bar{B}$ .

I.9. Arătați că evenimentele  $A$  și  $B$  sunt independente dacă

$$\frac{1}{P(A)} + \frac{1}{P(B)} = \frac{P(A)}{P(A \cap B)} + \frac{P(B)}{P(A \cap B)}.$$

I.10. Fie  $A$  și  $B$  evenimente aleatoare posibile (i.e., cu probabilitate nenulă). Arătați că

(a)  $P(\bar{A} \cup \bar{B}) = 1 - P(B)P(A|B);$

(b)  $P(A \cup B|A \cap \bar{B}) = P(A|A \cap \bar{B})P(B|\bar{A} \cap B);$

## Exerciții - Probabilitate condiționată și independență

$$(c) \frac{P(A|A \cup B)}{P(B|A \cup B)} = \frac{P(A)}{P(B)};$$

$$(d) \frac{P(\bar{B}|A)}{P(B)} + \frac{P(\bar{A})}{P(A)} = \frac{P(\bar{A}|B)}{P(A)} + \frac{P(\bar{B})}{P(B)}.$$

$$(e) \frac{P(A \cap C|B)}{P(\bar{A} \cup \bar{C}|B)} = \frac{P(A \cap C)}{P(\bar{A} \cup \bar{C})} \frac{P(B|A \cap C)}{P(B|\bar{A} \cup \bar{C})}.$$

I.11. Se dau trei evenimente aleatoare  $A_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , astfel încât

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3),$$

$$P(\bar{A}_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(\bar{A}_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3),$$

$$P(A_1 \cap \bar{A}_2 \cap A_3) = P(A_1) \cdot P(\bar{A}_2) \cdot P(A_3),$$

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \bar{A}_3) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(\bar{A}_3).$$

Arătați că cele trei evenimente sunt independente în ansamblu.

## Exerciții - Probabilitate condiționată și independență

I.12. Dacă evenimentele aleatoare  $A$ ,  $B$  și  $C$  sunt independente în ansamblu, atunci la fel sunt și evenimentele  $A$ ,  $B$  și  $\overline{C}$ .

I.13. Fie  $A_1$ ,  $A_2$  și  $A_3$  ( $P(A_3) > 0$ ) trei evenimente aleatoare independente în ansamblu. Demonstrați că

$$(a) P(A_1 \cap A_2 | A_3) = P(A_1 | A_3)P(A_2 | A_3) \text{ și}$$

$$(b) P(A_1 \cup A_2 | A_3) = P(A_1 | A_3) + P(A_2 | A_3) - P(A_1 \cap A_2 | A_3).$$

I.14. Evenimentele  $A_1, A_2, A_3, A_4$  sunt independente în ansamblu și  $P(A_3 \cap A_4) > 0$ . Arătați că  $P(A_1 \cup A_2 | A_3 \cap A_4) = P(A_1 \cup A_2)$ .

I.15. O monedă se aruncă de două ori. Se definesc evenimentele  $A$  = "apare stema la prima aruncare",  $B$  = "apare stema la cea de-a doua aruncare" și  $C$  = "la cele două aruncări avem rezultate diferite". Arătați că cele trei evenimente aleatoare sunt mutual independente fără a fi independente în ansamblu.

## Exerciții - Probabilitate condiționată și independență

I.16. Se aruncă pe rând două monede. Probabilitatea de a obține stema la amândouă aruncările este  $1/8$ , iar cea de a obține stema la amândouă aruncările știind că la cel puțin una dintre aruncări s-a obținut stema este  $3/14$ . Care sunt probabilitățile de a obține stema pentru prima și a doua monedă?

I.17. Un zar se aruncă de două ori; definim  $A$  = "la prima aruncare se obține 1, 3 sau 5",  $B$  = "la prima aruncare se obține 3, 4 sau 5",  $C$  = "suma este 3 sau 7". Arătați că  $P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)$  dar  $A$ ,  $B$  și  $C$  nu sunt independente în ansamblu.

I.18\*. Dați exemplu de trei evenimente aleatoare  $A$ ,  $B$  și  $C$  astfel încât  $P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)$  și  $P(\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}) \neq P(\overline{A}) \cdot P(\overline{B}) \cdot P(\overline{C})$ .

## Exerciții - Probabilitate condiționată și independență

I.19. Se consideră un experiment cu rezultate echiprobabile astfel încât  $|\Omega|$  este prim. Arătați că nu pot exista evenimente aleatoare netriviiale (i. e.,  $\neq \emptyset, \Omega$ ) independente.

I.20. Aruncăm un zar și notăm  $A = \{1, 2\}$ ,  $B = \{2, 4, 6\}$  și  $C = \{1, 4\}$ .

(a) Arătați că  $A$  și  $B$  nu sunt independente condiționat de  $C$ .

(b) Arătați că  $A$  și  $B$  sunt independente (necondiționat).

I.21. Fie  $C_1, C_2, \dots, C_n$  o partiție a spațiului de selecție  $\Omega$  iar  $A$  și  $B$  două evenimente aleatoare. Presupunem că  $A$  și  $B$  sunt independente condiționat de  $C_i$ , pentru orice  $1 \leq i \leq n$  și  $B$  este independent (necondiționat) de orice  $C_i$ . Să se arate că  $A$  și  $B$  sunt independente. (Indicație: folosiți Propoziția 4.)

## Exerciții - Formula probabilității totale și formula lui Bayes

II.1. Se dau patru urne identice la exterior, conținând:  $U_1$  - 4 bile albe și 5 bile negre;  $U_2$  - 3 bile albe și 7 bile negre;  $U_3$  - 2 bile albe și 4 bile negre;  $U_4$  - 3 bile albe și 5 bile negre. Dintr-una dintre cele patru urne, la întâmplare, se extrage o bilă.

- (a) Să se calculeze probabilitatea ca bila extrasă să fie albă.
- (b) Dacă bila extrasă este neagră să se calculeze probabilitatea ca ea să provină din urna  $U_2$ .

II.2. Probabilitatea ca o ușă să fie încuiată este  $1/2$ . Cheia de la această ușă se găsește pe un panou unde sunt 12 chei. Alegem la întâmplare două chei de pe panou.

- (a) Care este probabilitatea ca ușa să poată fi deschisă (fără a ne întoarce după o altă cheie)?
- (b) Dacă am deschis ușa, care este probabilitatea ca ea să fi fost încuiată?

## Exerciții - Formula probabilității totale și formula lui Bayes

II.3. Într-o urnă sunt trei monede: una dintre ele ( $M_1$ ) are probabilitatea de apărarea stema la o aruncare egală cu  $1/4$ , o a doua ( $M_2$ ) are această probabilitate egală cu  $3/4$ , iar cea de-a treia ( $M_3$ ) este o monedă normală. Din urnă se extrage la întâmplare o monedă care se aruncă o dată.

- Care este probabilitatea ca în urma aruncării să apară stema?
- Dacă se obține stema, care este probabilitatea ca moneda extrasă din urnă să fi fost  $M_1$ ?

II.4. Într-o urnă sunt patru zaruri: unul dintre ele ( $Z_1$ ) are numărul 6 pe toate fețele, un al doilea ( $Z_2$ ) are numărul 6 pe trei dintre fețe și numărul 3 pe celelalte trei fețe, iar celelalte două zaruri ( $Z_3, Z_4$ ) sunt normale. Din urnă se extrage la întâmplare un zar care se aruncă o dată.

- Care este probabilitatea ca să apară fața cu numărul 6?
- Dacă se obține fața cu numărul 6, care este probabilitatea ca zarul extras din urnă să fi fost  $Z_2$ ?

## Exerciții - Formula probabilității totale și formula lui Bayes

II.5. Într-o urnă sunt patru pachete de cărți: unul dintre ele ( $P_1$ ) conține doar 5 de treflă (52 de cărți identice), al doilea și al treilea pachet ( $P_2, P_3$ ) sunt normale, iar ultimul ( $P_4$ ) conține doar ași de treflă (52 de cărți identice). Din urnă se extrage la întâmplare un pachet, apoi din pachet se extrage o carte.

- (a) Care este probabilitatea de a obține un număr de treflă?
- (b) Dacă s-a obținut un as, care este probabilitatea ca pachetul extras din urnă să fie  $P_2$  sau  $P_3$ ?

II.6. Într-o urnă sunt trei monede: una are stema pe ambele fețe, una are banul pe ambele fețe, iar ultima este obișnuită. Se extrage din urnă o monedă, care apoi se aruncă și se reține fața obținută.

- (a) Care este probabilitatea de a obține banul?
- (b) Dacă s-a obținut stema, care este probabilitatea ca moneda extrasă să fi fost cea normală?

## Exerciții - Formula probabilității totale și formula lui Bayes

II.7. O urnă conține o bilă albă și două bile roșii. Se extrage o bilă din urnă și se procedează astfel: dacă bila este albă, ea se pune înapoi împreună cu o altă bilă albă; dacă bila extrasă este roșie, ea este pusă înapoi împreună cu alte două bile roșii. Apoi se mai extrage o bilă din urnă.

- (a) Care este probabilitatea ca a doua bilă extrasă să fie roșie?
- (b) Dacă a doua bilă extrasă este roșie, care este probabilitatea ca prima să fi fost roșie?

II.8. Un informatician cere angajatorului său o recomandare pentru un nou loc de muncă. El estimează că are 50% șanse de a primi noua slujbă cu o recomandare puternică, 40% cu o recomandare moderată și 20% cu o recomandare slabă. De asemenea consideră că angajatorul său va oferi o recomandare puternică, moderată sau slabă cu probabilitatea 0.4, 0.4 și 0.2, respectiv.

- (a) Care este probabilitatea ca informaticianul să primească o nouă slu-

## Exerciții - Formula probabilității totale și formula lui Bayes

(b) Dacă primește o nouă slujbă, care este probabilitatea să fi avut o recomandare slabă?

II.9. Într-o urnă sunt trei zaruri: două au numărul 5 pe cinci dintre fețe iar celălalt are numărul 5 pe patru fețe. Un zar este extras din urnă și se aruncă o dată.

(a) Care este probabilitatea ca la aruncare să apară numărul 5?

(b) Dacă la aruncare s-a obținut numărul 5, care este probabilitatea ca zarul extras să aibă numărul 5 pe patru fețe?

II.10. Se dau două urne:  $U_1$  conține 3 bile albe, 3 roșii și 4 bile negre și  $U_2$  conține 2 bile albe, 3 roșii și 2 negre. Din  $U_1$  se extrage o bilă și se introduce în  $U_2$ , apoi se extrage o bilă din  $U_2$ .

(a) Care este probabilitatea ca la a doua extragere să obținem o bilă albă?

(b) Dacă la a doua extragere s-a obținut o bilă albă, care este probabilitatea ca prima bilă extrasă să fi fost roșie?

## Exercises - Total Probability and Bayes Formulas

II.11. A urnă conține două monede: una obișnuită și una care are stema pe ambele fețe. Alegem la întâmplare o monedă din urnă și o aruncăm de două ori. Definim următoarele evenimente:  $A$  = "la prima aruncare se obține stema",  $B$  = "la a doua aruncare se obține stema" și  $C$  = "moneda aleasă este cea obișnuită".

- (a) Arătați că  $A$  și  $B$  sunt independente condiționat de  $C$ .
- (b) Calculați  $P(A|C)$ ,  $P(B|C)$  și  $P(A \cap B|C)$ .
- (c) Calculați  $P(A)$ ,  $P(B)$  și  $P(A \cap B)$ .
- (d) Sunt  $A$  și  $B$  independente (necondiționat)?

(Indicație: folosiți Propoziția 4.)

## Exerciții - Formula probabilității totale și formula lui Bayes

II.12. Fie  $A$  și  $B$  două evenimente posibile. Se spune ca  $A$  sugerează  $B$ , dacă  $P(A|B) > P(A)$  și că nu sugerează  $B$  dacă  $P(A|B) < P(A)$ .






- Să se arate că  $A$  sugerează  $B$  dacă și numai dacă  $B$  sugerează  $A$ .
- Dacă  $\bar{A}$  este eveniment posibil, atunci  $A$  sugerează  $B$  dacă și numai dacă  $\bar{A}$  nu sugerează  $B$ .
- O comoară se găsește într-unul din două locuri cunoscute cu probabilități  $\beta \in (0, 1)$  respectiv  $(1 - \beta)$ . Căutăm mai întâi în primul loc și găsim comoara cu probabilitate  $p > 0$ . Arătați că evenimentul de a nu găsi comoara în primul loc sugerează că ea se găsește în cel de-al doilea loc.

## Exerciții - Formula probabilității totale și formula lui Bayes

II.13\*. Un anumit curs are o prezență scăzută. Profesorul hotărăște să nu țină cursul dacă nu sunt prezenți cel puțin  $k$  din cei  $n$  studenți înscriși la curs. Fiecare student vine la curs independent cu probabilitate  $p_b$  dacă vremea este bună și cu probabilitate  $p_r$  dacă vremea este rea. Se cunoaște probabilitatea,  $q$ , ca vremea să fie rea într-o anumită zi.

- (a) Calculați probabilitatea ca profesorul să își țină cursul într-o anumită zi.
- (b) Dacă se ține cursul într-o anumită zi, care este probabilitatea ca vremea să fi fost rea?

## Bibliography

-  Bertsekas, D. P., J. N. Tsitsiklis, *Introduction to Probability*, Athena Scietific, 2002.
-  Gordon, H., *Discrete Probability*, Springer Verlag, New York, 1997.
-  Lipschutz, S., *Theory and Problems of Probability*, Scahaum's Outline Series, McGraw-Hill, 1965.
-  Ross, S. M., *A First Course in Probability*, Prentice Hall, 5th edition, 1998.
-  Stone, C. J., *A Course in Probability and Statistics*, Duxbury Press, 1996.