



## Table of contents

- 1 Procese aleatoare
- 2 Lanțuri Markov discrete
  - Introducere
  - Probabilitățile unui drum și ale tranzițiilor în  $n$  pași
  - Tipuri de stări
  - Comportamentul pe termen lung al lanțurilor Markov
- 3 Drumuri aleatoare - Random walks
  - Random walks în grafuri neorientate
  - Un algoritm pentru detectarea  $s$ - $t$  conexiunii
- 4 Exerciții
- 5 Bibliography

## Introducere

Acest capitol este dedicat introducerii unei noțiuni larg utilizate în diverse ramuri ale științei (de la fizica statistică, trecând prin inteligența artificială, până la științele economice): *procesele aleatoare* sau *stochastice* (i.e., care variază aleator). Informal un proces stohastic este un model matematic al unui experiment probabilistic care evoluează în timp și produce o secvență de valori numerice.

Spre exemplu un proces stohastic poate fi folosit pentru a modela:

- variația prețurilor unei acțiuni la bursă;
- pozițiile succesive pe radar ale unui avion comercial;
- variația nivelului de încărcare a traficului într-un nod de comunicații etc.

## Introducere

### Definiția 1

Un **proces stochastic** este o familie de variabile aleatoare  $(X(i))_{i \in I}$ , definite peste un spațiu cu probabilitate.

- Fiecare variabilă  $X_i = X(i) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  reprezintă o stare sau un pas al procesului; dacă mulțimea care le indexează,  $I$ , este discretă atunci avem de-a face cu un **proces stochastic discret**. În cele ce urmează vom presupune că  $|I| \leq |\mathbb{N}^*|$ .
- Exemple de procese aleatoare:
  - 1 **Procese de tip sosire**: mesaje recepționate, clienți care ajung la un server etc. Acestea sunt **proces Bernoulli** sau **proces Poisson** (o variantă continuă a celor Bernoulli).
  - 2 **Procese** sau **lanțuri Markov**: sunt experimente probabilistice care evoluează în timp și în care o stare viitoare depinde într-o anumită măsură (probabilistic) de ceea ce s-a întâmplat în trecut.

## Lanțuri Markov discrete

- Un lanț Markov este un proces al cărui viitor depinde de trecut într-o anumită măsură.
- Efectul acesta al trecutului asupra viitorului este modelat prin intermediul stărilor procesului; aceste stări se schimbă conform unor probabilități date. În plus, ne vom limita la procese ale căror stări pot lua un număr finit de valori.

## Lanțuri Markov discrete

Probabilități și Statistică

Probabilități și Statistică

Probabilități și Statistică

Probabilități și Statistică

Probabilități și Statistică

Probabilități și Statistică

## Definiția 2

- (i) Un lanț Markov discret cu o mulțime finită de stări este un proces stochastic  $(X_n)_{n \geq 1}$  format din variabile aleatoare  $X_n : \Omega \rightarrow S = \{s_1, s_2, \dots, s_m\}$  care au proprietatea numită a lui Markov:

$$\begin{aligned} P\{X_{n+1} = s | X_1 = s_{i_1}, X_2 = s_{i_2}, \dots, X_n = s_{i_n}\} = \\ = P\{X_{n+1} = s | X_n = s_{i_n}\}, \forall n \geq 1. \end{aligned}$$

- (ii) Un lanț Markov se numește omogen (sau staționar) dacă

$$\begin{aligned} P\{X_{n+1} = s_j | X_n = s_i\} = P\{X_n = s_j | X_{n-1} = s_i\} = p_{ij}, \\ \forall n \geq 2, s_i, s_j \in S. \end{aligned}$$

## Lanțuri Markov discrete

- În cele ce urmează vom considera doar lanțuri Markov omogene, discrete și cu un număr finit de stări.
- $S$  este spațiul stărilor, iar  $p_{ij}$  *probabilitățile de tranziție*, matricea formată cu aceste probabilități  $P = (p_{ij})_{1 \leq i, j \leq m}$  se numește *matricea de tranziție probabilistă* a lanțului.

Un astfel de lanț Markov se identifică prin:

- spațiul stărilor  $S = \{s_1, s_2, \dots, s_m\}$
- și probabilitățile  $p_{ij}$  de trecere dintr-o stare în alta.
- Un lanț Markov poate fi reprezentat printr-un *digraf al tranzițiilor probabiliste*: nodurile sunt stări posibile, iar între acestea avem arce cu probabilitățile corespunzătoare de tranziție.

## Lanțuri Markov discrete - exemple

*Exemplu.* Alice urmează un curs săptămânal de "Teoria probabilităților", în fiecare săptămână ea fie rămâne în urmă, fie ajunge la zi cu materia corespunzătoare. Dacă într-o săptămână este în urmă cu materia, atunci probabilitatea ca ea să rămână în urmă și în săptămâna următoare este 0.4, iar probabilitatea ca ea să ajungă la zi cu materia este 0.6. Dacă într-o săptămână Alice este la zi cu materia, atunci probabilitatea ca ea să rămână în urmă în săptămâna următoare este 0.2, iar cea ca să fie la zi și în săptămâna următoare este 0.8.

Avem un lanț omogen Markov și discret cu două stări posibile:  $s_1$  - Alice e la zi cu materia și  $s_2$  - ea a rămas în urmă. Probabilitățile de tranziție sunt

$$p_{11} = 0.8, p_{12} = 0.2, p_{21} = 0.6, p_{22} = 0.4 \clubsuit$$



## Lanțuri Markov discrete - exemple

*Exemplu.* O albină se mișcă pe o linie dreaptă câte o unitate în fiecare interval de timp astfel: la stânga cu probabilitate 0.3, la dreapta cu probabilitate 0.3 și rămâne pe loc cu probabilitate 0.4 independent de mișcările făcute anterior. Doi paianjeni se află pe această dreaptă în pozițiile 1 și  $m$ . Dacă albina ajunge într-unul din aceste puncte procesul se încheie.

Construim un lanț Markov presupunând că albina se găsește inițial într-un punct între 1 și  $m$  (pe o coordonată întreagă).

Stările lanțului sunt  $1, 2, \dots, m$  - pozițiile albinei. Probabilitățile de tranziție nenule sunt:

$$p_{11} = p_{mm} = 1,$$

$$p_{ij} = \begin{cases} 0.3, & \text{dacă } j \in \{i - 1, i + 1\}, \\ 0.4, & j = i \end{cases}, \text{ pentru } i = \overline{2, m - 1} \clubsuit$$

## Probabilitățile unui drum și ale tranzițiilor în $n$ pași

- Dat un lanț Markov putem determina probabilitatea unei secvențe de stări viitoare ale lanțului folosind *formula de înmulțire*.

### Propoziția 1

Dat un lanț Markov  $(X_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ , avem

$$P\{X_1 = s_{i_1}, X_2 = s_{i_2}, \dots, X_n = s_{i_n}\} = P(X_1 = s_{i_1}) \cdot p_{i_1 i_2} \cdot p_{i_2 i_3} \cdots p_{i_{n-1} i_n}.$$

proof:

$$\begin{aligned} P\{X_1 = s_{i_1}, X_2 = s_{i_2}, \dots, X_n = s_{i_n}\} &= P(X_1 = s_{i_1}) \cdot P(X_2 = s_{i_2} | X_1 = s_{i_1}) \cdot \\ &\cdots \cdot P\{X_n = s_{i_n} | X_1 = s_{i_1}, X_2 = s_{i_2}, \dots, X_{n-1} = s_{i_{n-1}}\} = \\ &= P(X_1 = s_{i_1}) \cdot p_{i_1 i_2} \cdot p_{i_2 i_3} \cdots p_{i_{n-1} i_n}, \end{aligned}$$

utilizând formula de înmulțire și cea a lui Markov. Pentru a calcula această probabilitate trebuie cunoscută distribuția pasului inițial,  $X_1$ .

## Probabilitățile unui drum și ale tranzițiilor în $n$ pași

- În multe probleme asociate lanțurilor Markov este necesar să cunoaștem distribuția unei stări viitoare în funcție de starea curentă.

### Definiția 3

Probabilitățile tranzițiilor în  $n$  pași sunt

$$r_{ij}^{(n)} = P\{X_{n+1} = s_j | X_1 = s_i\}.$$

- Datorită omogenității  $r_{ij}^{(n)}$  este probabilitatea ca după  $n$  pași starea să devină  $s_j$ , dacă starea inițială este  $s_i$  (indiferent care este momentul inițial:  $r_{ij}^{(n)} = P\{X_{n+k} = s_j | X_k = s_i\}$ ). Aceste probabilități se pot calcula folosind ecuația recursivă de mai jos.

## Probabilitățile unui drum și ale tranzițiilor în $n$ pași

### Propoziția 2

(*Ecuația Chapman-Kolmogorov*) Probabilitățile tranzițiilor în  $n$  pași pot fi calculate folosind următoarea formulă recursivă

$$r_{ij}^{(n)} = \sum_{k=1}^m r_{ik}^{(n-1)} \cdot p_{kj}, \text{ pentru } n \geq 2, 1 \leq i, j \leq m, \text{ unde } r_{ij}^{(1)} = p_{ij}.$$

proof: Aplicăm varianta condiționată a probabilității totale:

$$\begin{aligned} P\{X_{n+1} = s_j | X_1 = s_i\} &= \sum_{k=1}^m P\{X_n = s_k | X_1 = s_i\} \cdot \\ &\cdot P\{X_{n+1} = s_j | X_n = s_k, X_1 = s_i\} = \\ &= \sum_{k=1}^m P\{X_n = s_k | X_1 = s_i\} \cdot P\{X_{n+1} = s_j | X_n = s_k\} = \sum_{k=1}^m r_{ik}^{(n-1)} \cdot p_{kj}. \end{aligned}$$



## Probabilitățile unui drum și ale tranzițiilor în $n$ pași

- Matricea pătratică de ordin  $m$  formată cu probabilitățile  $r_{ij}^{(n)}$  (pentru un  $n$  fixat) se numește *matricea probabilităților de tranziție în  $n$  pași*.
- Din ecuația Chapman-Kolmogorov se poate obține următorul rezultat (a cărui demonstrație este lăsată ca exercițiu).

### Propoziția 3

*Matricea probabilităților de tranziție în  $n$  pași este  $P^n$ , unde  $P$  este matricea probabilităților de tranziție.*

Aceste matrici de tranziție sunt *matrici stochastice*: au elemente care reprezintă probabilități și suma elementelor de pe fiecare linie este 1.

## Tipuri de stări

- Sunt anumite situații în care probabilitățile  $r_{ij}^{(n)}$  converg pentru  $n \rightarrow +\infty$ , indiferent de starea inițială  $i$ .

*Exemplu (continuare)* Reluăm exemplul cu lanțul Markov de mai sus care are matricea probabilităților de tranziție

$$P = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.6 & 0.4 \end{bmatrix}, P^2 = \begin{bmatrix} 0.76 & 0.24 \\ 0.72 & 0.28 \end{bmatrix}, P^3 = \begin{bmatrix} 0.752 & 0.248 \\ 0.744 & 0.256 \end{bmatrix},$$

$$\dots, P^{10} = \begin{bmatrix} 0.7500 & 0.2502 \\ 0.7508 & 0.2505 \end{bmatrix}.$$

Se observă că matricea de tranziție în  $n$  pași tinde la o matrice constantă, fără ca starea inițială să conteze (coloanele sunt constante). ♣

## Tipuri de stări

*Exemplu (continuare)* Reluăm exemplul cu albina și cei doi paianjeni.

$$P = \begin{bmatrix} 1.0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.3 & 0.4 & 0.3 & 0 \\ 0 & 0.3 & 0.4 & 0.3 \\ 0 & 0 & 0 & 1.0 \end{bmatrix}, P^{20} = \begin{bmatrix} 1.0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.669 & 0.0004 & 0.0004 & 0.329 \\ 0.329 & 0.0004 & 0.0004 & 0.669 \\ 0 & 0 & 0 & 1.0 \end{bmatrix} \clubsuit$$

Observăm și în acest caz că (aparent) există limite ale anumitor probabilități de tranziție în  $n$  pași care depind de starea inițială:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} r_{11}^{(n)} = 1, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} r_{21}^{(n)} = 2/3,$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} r_{31}^{(n)} = 1/3, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} r_{41}^{(n)} = 0.$$

## Tipuri de stări

- Clasificarea pe care o vom da stărilor privește frecvența pe termen lung cu care ele sunt vizitate.

### Definiția 4

- (i) O stare  $s_j$  este **accesibilă** din starea  $s_i$  dacă există un număr de pași,  $n \geq 1$ , astfel ca  $r_{ij}^{(n)} > 0$ ; fie  $A(s_i)$  mulțimea stărilor care sunt accesibile din starea  $s_i$ .
- (ii) O stare  $s_i$  este numită **recurentă** dacă pentru orice stare  $s_j$  care este accesibilă din  $s_i$ ,  $s_i$  este de asemenea accesibilă din  $s_j$ .
- (iii) O stare se numește **tranzitorie** dacă nu este recurentă.



## Tipuri de stări

- Să observăm că starea  $s_j$  este accesibilă din  $s_i$  dacă există un șir de stări  $s_{i_1}, s_{i_2}, \dots, s_{i_{n-1}}$  astfel încât

$$p_{i i_1}, p_{i_1 i_2}, \dots, p_{i_{n-1} j} > 0,$$

altfel spus un drum din starea  $s_i$  în starea  $s_j$  este posibil.

- Starea  $s_i$  este recurentă dacă și numai dacă  $\forall s_j \in A(s_i) \Rightarrow s_i \in A(s_j)$ . Dacă începem în starea recurentă  $s_i$ , atunci probabilitatea de a reveni în starea  $s_i$  în viitor este strict pozitivă (la fel ca și probabilitatea ca starea  $s_i$  să fie vizitată în viitor de o infinitate de ori).
- Mai mult, dacă  $s_i$  este recurentă, atunci  $A(s_i) = A(s_j)$ , pentru orice  $s_j \in A(s_i)$ : plecând din  $s_i$  rămânem în  $A(s_i)$ .

## Tipuri de stări

### Definiția 5

Dacă  $s_i$  este o stare recurentă, atunci toate stările accesibile din  $s_i$  formează o clasă recurentă.

- Se poate demonstra cu ușurință (exercițiu): clasele recurente sunt clasele de echivalență relativ la următoarea relație (care este una de echivalență pe mulțimea stărilor recurente):  $s_i \sim s_j$  dacă  $A(s_i) = A(s_j)$ .

### Teorema 3.1

Un lanț Markov poate fi descompus într-una sau mai multe clase recurente și un număr ( $\geq 0$ ) de stări tranzitorii.

- Următoarele proprietăți ale stărilor sunt lăsate ca exercițiu.

## Tipuri de stări

### Propoziția 4

*Considerăm un lanț Markov omogen, discret și cu o mulțime finită de stări. Atunci*

- (i) O stare recurentă este accesibilă din toate stările din clasa sa și, posibil, din alte stări tranzitorii, dar nu și din stări aflate într-o altă clasă recurentă.*
- (ii) O stare tranzitorie nu este accesibilă din nici o stare recurentă.*
- (iii) Dintr-o stare tranzitorie este accesibilă cel puțin o stare recurentă.*

- Definiția dată clasei recurente nu exclude existența unei clase formate dintr-o singură stare în care intră o buclă și din care nu mai iese nici un arc.

## Tipuri de stări

- Rezultatele anterioare ne permit argumentarea unor proprietăți ale acestor procese și vizualizarea evoluției acestora:
- (i) dacă am intrat (sau chiar am început) într-o stare recurentă, atunci nu mai părăsim clasa acesteia și toate stările din această clasă vor fi vizitate de o infinitate de ori.
- (ii) dacă starea inițială este una tranzitorie atunci vom merge printr-un număr de stări tranzitorii și apoi, eventual, vom intra într-o clasă recurentă fără să o mai părăsim.

### Definiția 6

O clasă recurentă se numește **periodică** dacă stările care o compun pot fi partiționate în  $k \geq 2$  submulțimi  $C_1, C_2, \dots, C_k$ , astfel încât tranzițiile nu pot avea loc decât de la o submulțime la alta, în ordinea dată și circular:

$$\forall s_i \in C_h, p_{ij} > 0 \Rightarrow s_j \in \begin{cases} C_1, & \text{dacă } h = k \\ C_{h+1}, & \text{altfel} \end{cases}.$$

## Tipuri de stări

- Se observă că dacă  $s_i$  face parte dintr-o clasă periodică, pentru orice  $n \geq 1$  trebuie să existe cel puțin o stare  $s_j$ , astfel încât  $r_{ij}^{(n)} = 0$ . În felul acesta avem un criteriu după care o clasă recurentă este neperiodică:
- $R$  este neperiodică dacă există un  $n \geq 1$  și  $s_i \in R$ , astfel ca  $r_{ij}^{(n)} > 0$ , pentru orice  $s_j \in R$ .
- Pentru modelele bazate pe lanțuri Markov ne interesează cel mai adesea comportamentul pe termen lung, adică probabilitățile de tranziție  $r_{ij}^{(n)}$ , pentru  $n$  foarte mare.
- Vom defini în această secțiune condiții în care  $r_{ij}^{(n)}$  converge independent de starea inițială  $s_i$ .
- Dacă există două clase recurente, atunci limitele acestor probabilități, dacă există, pot depinde de starea inițială (o clasă recurentă nu poate fi părăsită). Vom presupune că lanțul are o singură clasă recurentă plus, eventual, alte câteva stări tranzitorii.

## Timpul de întoarcere într-o stare

Notăm cu  $q_{ij}^t$  probabilitatea ca, plecând din starea  $s_i$ , prima tranziție în starea  $s_j$  să apară după  $t$  pași:

$$q_{ij}^t = P(X_t = s_j \text{ and, for } s = \overline{1, t-1}, X_s \neq s_j | X_0 = s_i).$$

### Definiția 7

Fie  $Z_{ij}$  *timpul de ajungere în starea  $s_j$  plecând din  $s_i$* ; media acestei variabile aleatoare,  $h_{ij} = \mathbb{E}[Z_{ij}] = \sum_{t \geq 1} t q_{ij}^t$ , este numită *timpul mediu de ajungere în starea  $s_j$  plecând din  $s_i$* . ( $Z_{ii}$  este *timpul de întoarcere în starea  $s_i$* , iar  $h_{ii}$  este *timpul mediu de întoarcere în  $s_i$* .)

- Se poate observa că pentru un lanț Markov cu un număr finit de stări mediile de mai sus sunt finite.

## Comportamentul pe termen lung al lanțurilor Markov

*Exemplu.* Considerăm un lanț Markov cu două stări  $\{s_1, s_2\}$ , astfel că din  $s_1$  trecem în  $s_2$  ( $p_{12} = 1$ ) și din  $s_2$  în  $s_1$  ( $p_{21} = 1$ ). Deci, după un număr par de pași revenim în starea din care am plecat:

$$r_{ii}^{(n)} = \begin{cases} 1, & n \text{ par} \\ 0, & n \text{ impar} \end{cases} \clubsuit$$

- Acesta este un exemplu în care șirul  $r_{ii}^{(n)}$  nu converge (oscilează) și sigura clasă a lanțului este periodică. Pentru convergență ar trebui ca lanțul să nu conțină clase periodice.
- Următorul rezultat (central al cursului) precizează condițiile în care convergența are loc și limita nu depinde de starea inițială.

## Comportamentul pe termen lung al lanțurilor Markov

## Teorema 4.1

Considerăm un lanț Markov omogen, discret și cu o mulțime finită de stări. Dacă lanțul conține o singură clasă recurentă care este neperiodică (și, eventual, stări tranzitorii), atunci fiecărei stări  $s_j$  îi putem asocia o **probabilitate de echilibru (staționară)**  $\pi_j$  cu următoarele proprietăți:

(i)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} r_{ij}^{(n)} = \pi_j$ , pentru orice  $i$  și  $j$ .

(ii)  $(\pi_j)_{1 \leq j \leq m}$  sunt soluțiile sistemului

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^m \pi_k p_{kj} = \pi_j, & j = \overline{1, m} \\ \sum_{k=1}^m \pi_k = 1 \end{cases}$$

(iii)  $\pi_j = 0$ , dacă  $s_j$  este tranzitorie și  $\pi_j = \frac{1}{h_j} > 0$ , dacă  $s_j$  este



## Comportamentul pe termen lung al lanțurilor Markov

- Probabilitățile  $\pi_j$  formează o distribuție de probabilitate pe spațiul stărilor: **distribuția staționară** - numită astfel deoarece, dacă  $X_1$  are această distribuție

$$P\{X_1 = s_j\} = \pi_j, \forall 1 \leq j \leq m, \text{ atunci}$$

$$P\{X_2 = s_j\} = \sum_{k=1}^m P\{X_1 = k\}p_{kj} = \sum_{k=1}^m \pi_k p_{kj} = \pi_j, \forall 1 \leq j \leq m$$

și, în mod similar, se arată că  $P\{X_n = s_j\} = \pi_j, \forall 1 \leq j \leq m, \forall n \geq 1$ .

$$\sum_{k=1}^m \pi_k p_{kj} = \pi_j, j = \overline{1, m}$$

se numesc **ecuațiile de echilibru** (consecință a ecuației Chapman-Kolmogorov și a existenței limitelor din teorema de mai sus).

$$\sum_{k=1}^m \pi_k = 1 \text{ este } \text{ecuația de normalizare.}$$

## Comportamentul pe termen lung al lanțurilor Markov

*Exemplu* Considerăm un lanț Markov finit și omogen, cu două stări și probabilitățile de tranziție

$$P = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.6 & 0.4 \end{bmatrix}.$$

*Soluție:* Ecuațiile de echilibru sunt

$$\pi_1 = \pi_1 p_{11} + \pi_2 p_{21} \text{ și } \pi_2 = \pi_1 p_{12} + \pi_2 p_{22},$$

adică

$$\pi_1 = 0.8\pi_1 + 0.6\pi_2 \text{ și } \pi_2 = 0.2\pi_1 + 0.4\pi_2.$$

Aceste două ecuații sunt echivalente amândouă cu ecuația

$$\pi_1 = 3\pi_2.$$

Folosind și ecuația de normalizare  $\pi_1 + \pi_2 = 1$ , obținem

$$\pi_1 = 0.75, \pi_2 = 0.25 \clubsuit$$

## Comportamentul pe termen lung al lanțurilor Markov

*Exemplu.* Un profesor "absent" are două umbrele pe care le folosește atunci când merge de acasă la birou sau invers. Dacă plouă și dacă o umbrelă este la dispoziție, atunci profesorul o ia și o folosește; dacă nu plouă, atunci profesorul uită întotdeauna să ia umbrela. Să presupunem că de fiecare dată când profesorul trebuie să se deplaseze între cele două locații plouă cu probabilitate  $p \in (0, 1)$ , independent de fiecare dată. Care sunt probabilitățile de echilibru?

*Soluție:* Starea  $s_i$ : în locația unde se află profesorul se găsesc  $i$  umbrele,  $i = \overline{0, 2}$ . Matricea probabilităților de tranziție este:

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1-p & p \\ 1-p & p & 0 \end{bmatrix}$$

## Comportamentul pe termen lung al lanțurilor Markov

Se observă că lanțul are o singură clasă recurentă care este neperiodică, deci se poate aplica teorema de mai sus și ecuațiile de echilibru sunt

$$\pi_0 = (1 - p)\pi_2, \pi_1 = (1 - p)\pi_1 + p\pi_2 \text{ și } \pi_2 = \pi_0 + p\pi_1.$$

rezolvând sistemul (împreună cu ecuația de normalizare) obținem

$$\pi_0 = \frac{1 - p}{3 - p}, \pi_1 = \frac{1}{3 - p}, \pi_2 = \frac{1}{3 - p} \clubsuit$$

## Random walks în grafuri neorientate

- Un *drum aleator* sau *random walk* într-un graf neorientat este un tip special de lanț Markov folosit la analiza algoritmilor. Fie  $G = (V, E)$  un graf (finit) neorientat și conex.

### Definiția 8

*Un random walk în  $G$  este un lanț Markov definit printr-o secvență de mișcări ale unei particule între nodurile unui graf (acestea sunt stările lanțului). Dacă particula se află în nodul  $s_i$  care are  $d_i = d_G(s_i)$  vecini, atunci probabilitatea ca particula să meargă pe muchia  $s_i s_j$  și să se mute în nodul  $s_j$  este  $1/d_i$ .*

- $G$  fiind conex drumul aleator (random walk) corespunzător are o singură clasă recurentă (de ce?).
- Digraful tranzițiilor probabiliste se obține orientând fiecare muchie a lui  $G$  în ambele sensuri. Fie  $\vec{G}$  digraful corespunzător drumului aleator în  $G$ .

## Random walks în grafuri neorientate

### Lema 1.1

*Un random walk într-un graf conex neorientat,  $G$ , este neperiodic dacă și numai dacă  $G$  nu este bipartit.*

proof: Un graf este bipartit dacă și numai dacă nu conține circuite impare. Evident că în  $\vec{G}$  există un drum de la orice nod la el însuși de lungime 2. Dacă  $G$  este bipartit atunci avem un random walk periodic cu perioada 2. Dacă  $G$  nu este bipartit atunci conține un circuit impar și există noduri care au drumuri impare până la ele însele. ■

- Un random walk într-un graf conex neorientat care nu este bipartit satisface condițiile din Teorema 4.1.

### Teorema 1.1

*Fie  $G$  un graf neorientat, conex care nu este bipartit. Probabilitățile de echilibru ale drumului aleator în  $G$  sunt:  $\pi_i = \frac{1}{h_{ii}} = \frac{d_i}{2|E|}, \forall s_i \in$*

## Random walks în grafuri neorientate

proof: Fie  $P = (p_{ij})$  matricea probabilităților de tranziție ale lanțului Markov corespunzător. Distribuția staționară există datorită Teoremei 4.1 și nu există stări tranzitorii. Fie  $(\pi_i)_{s_i \in V}$  această distribuție. Ecuațiile de echilibru,  $\pi = \pi P$ , sunt echivalente cu

$$\pi_j = \sum_{s_i \in N_G(s_j)} \frac{d_i}{2|E|} \frac{1}{d_i} = \frac{d_j}{2|E|}.$$

Din teorema citată rezultă că  $\pi_j = \frac{1}{h_{jj}}$ , pentru orice  $j$ . (Deoarece

$$\sum_{s_i \in V} d_i = 2|E| \text{ urmează că } \sum_{s_i \in V} \pi_i = 1 \text{ care este ecuația de normalizare.)}$$



## Lema 1.2

Dacă  $s_i s_j \in E$ , atunci  $h_{ij} < 2|E|$ .

## Random walks în grafuri neorientate

proof: Calculăm  $h_{ii}$  într-un mod diferit:

$$\begin{aligned}
 h_{ii} &= \sum_{t \geq 1} t q_{ii}^t = \sum_{t \geq 1} t \sum_{s_j \in N_G(s_i)} p_{ij} q_{ji}^{t-1} = \frac{1}{d_i} \sum_{t \geq 1} \sum_{s_j \in N_G(s_i)} t q_{ji}^{t-1} = \\
 &= \frac{1}{d_i} \left[ \sum_{t \geq 1} \sum_{s_j \in N_G(s_i)} q_{ji}^{t-1} + \sum_{t \geq 1} \sum_{s_j \in N_G(s_i)} (t-1) q_{ji}^{t-1} \right] = \\
 &= \frac{1}{d_i} \left( \sum_{t \geq 1} \sum_{s_j \in N_G(s_i)} q_{ji}^{t-1} + \sum_{t \geq 1} \sum_{s_j \in N_G(s_i)} t q_{ji}^t \right) = \\
 &= \frac{1}{d_i} \sum_{s_j \in N_G(s_i)} \left( 1 + \sum_{t \geq 1} t q_{ji}^t \right) = \frac{1}{d_i} \sum_{s_j \in N_G(s_i)} (1 + h_{ji}).
 \end{aligned}$$

Deoarece  $h_{ii} = \frac{1}{\pi_i} = \frac{2|E|}{d_i}$ , avem  $2|E| = \sum_{s_j \in N_G(s_i)} (1 + h_{ji})$  și obținem că



## Random walks în grafuri neorientate

### Definiția 9

**Timpul de acoperire - cover time** al grafului  $G$  ( $\text{cover}(G)$ ) este cel mai mare timp mediu necesar vizitării tuturor nodurilor grafului de către un random walk care pleacă dintr-un nod  $s_i$ .

### Lema 1.3

Timpul de acoperire al lui  $G = (V, E)$  este cel mult  $4mn$  ( $n = |V|$ ,  $m = |E|$ ).

proof: Alegem un arbore parțial  $T$  al lui  $G$  și un parcurs eulerian închis al lui  $\vec{T}$ . Fie  $s_{i_1}, s_{i_2}, \dots, s_{i_{2n}}$  secvența de vizitare a nodurilor prin acest parcurs plecând din nodul  $s_{i_1}$  (de exemplu secvența nodurilor prin care trecem la o parcurgere  $dfs$ ).

Timpul mediu necesar trecerii prin toate nodurile în acest parcurs este un majorant pentru timpul de acoperire:

## Un algoritm pentru detectarea $s$ - $t$ conexiunii

- Să presupunem că avem un graf neorientat  $G = (V, E)$  ( $|V| = n, |E| = m$ ) și două noduri  $s, t \in V$ .
- Problemă este de a determina un drum de la  $s$  la  $t$  în  $G$ , dacă un asemenea drum există.
- Soluții pentru această problemă există: se poate utiliza o parcurgere *bfs* sau *dfs*. Complexitatea timp a acestor parcurgeri este  $\mathcal{O}(m+n)$ , spațiul adițional necesar este  $\Omega(n)$  (trebuie ținute minte nodurile vizitate).
- Prezentăm un *algoritm aleator* (sau *randomizat*) care folosește doar  $\mathcal{O}(\log n)$  biți de memorie.
- Algoritmul prezentat va parcurge un random walk în  $G$  pentru suficient de mulți pași astfel încât un drum de la  $s$  la  $t$  să aibă șanse mari de a fi găsit.

Un algoritm pentru detectarea  $s$ - $t$  conexiunii

```

start a random walk from  $s$ ;
if (drumul atinge  $t$  în  $4n^3$  pași)
    return "există un drum";
return "nu există un drum"

```

- Algoritmul reține poziția curentă folosind  $\mathcal{O}(\log n)$  biți și numărul de pași făcuți (cel mult  $4n^3$ ) care de asemenea necesită  $\mathcal{O}(\log n)$  biți.
- Vom presupune că graful nu conține componente conexe bipartite pentru a putea aplica rezultatele anterioare.

## Teorema 2.1

Algoritmul de mai sus oferă un răspuns corect cu probabilitate cel puțin  $1/2$  și greșește doar când returnează mesajul "nu există un drum" când de fapt un asemenea drum există.

Un algoritm pentru detectarea  $s$ - $t$  conexiunii

proof: Dacă nu există drum de la  $s$  la  $t$ , algoritmul returnează un răspuns corect.

Să presupunem că există un  $s$ - $t$  drum în  $G$ . Fie  $X$  timpul necesar ajungerii de la  $s$  la  $t$ ; timpul mediu necesar ajungerii de la  $s$  la  $t$ ,  $\mathbb{E}[X]$ , este mărginit de timpul de acoperire al componentei conexe care conține  $s$  și  $t$ ,  $G'$ , care este cel mult  $4mn < 2n^3$ . Din inegalitatea lui Markov probabilitatea ca drumul aleator să aibă mai mult de  $4n^3$  pași este

$$P(X \geq 4n^3) < P(X \geq 8nm) \leq P(X \geq 2\mathbb{E}[X]) \leq \frac{\mathbb{E}[X]}{2\mathbb{E}[X]} = \frac{1}{2}.$$

Astfel, algoritmul greșește cu probabilitate de cel mult  $1/2$ . ■

## Exerciții pentru seminar

- Lanțuri Markov: 1, 2, 3, 5, 6, 9, 10, 16, 18, 19, 21
- Rezervă: 11, 15, 20, 22



## Lanțuri Markov - exerciții

1. O metodă naivă de a prezice starea vremii este următoarea: starea meteo de mâine este aceeași cu cea de astăzi. Vom presupune că acest tip de predicție este adevărat în 75% dintre cazuri. Pentru a simplifica presupunem că există doar două tipuri de vreme: "însorită" și "ploioasă". Determinați lanțul Markov al stărilor meteo, digraful de tranziție și probabilitățile de echilibru.
2. Metoda anterioară de prezicere este modificată în cazul unui oraș însorit: probabilitatea de a trece de la o zi ploioasă la una însorită este 0.5, iar probabilitatea de a trece de la o zi însorită la una ploioasă este 0.1. Reluați exercițiul în acest caz.
3. Desenați digraful de tranziție al unui lanț Markov care să aibă mai multe clase recurente și mai multe stări tranzitorii.
4. Desenați digraful de tranziție al unui lanț Markov care să aibă o clasă recurentă periodică și două stări tranzitorii.
5. Determinați matricea de tranziție a unui lanț Markov periodic cu

## Lanțuri Markov - exerciții

6. Desenați digraful de tranziție al unui lanț Markov care să aibă două clase recurente neperiodice și o stare tranzitorie.

7. Pe mulțime stărilor recurente ale unui lanț Markov omogen și discret definim următoarea relație:  $s_i$  comunică cu  $s_j$  dacă  $s_j$  este accesibilă din  $s_i$  (și notăm cu  $s_i \leftrightarrow s_j$ ). Arătați că această relație este una de echivalență, adică este

1. *reflexivă*: pentru orice  $i$ ,  $s_i \leftrightarrow s_i$ ;
2. *simetrică*: dacă  $s_i \leftrightarrow s_j$ , atunci  $s_j \leftrightarrow s_i$ , pentru orice  $i, j$ ;
3. *tranzitivă*: dacă  $s_i \leftrightarrow s_j$  și  $s_j \leftrightarrow s_k$ , atunci  $s_i \leftrightarrow s_k$  pentru orice  $i, j, k$ .

8\*. O matrice  $n \times n$  se numește *dublu stochastică* dacă suma elementelor pe fiecare linie este 1 și suma elementelor pe fiecare coloană este 1. Arătați că distribuția staționară a unui lanț Markov cu matricea de tranziție dublu stochastică este uniformă.



## Lanțuri Markov - exerciții

9. Un profesor dă teste care pot fi dificile, medii sau ușoare. Dacă, la un moment dat, dă un test dificil, următorul test poate fi doar mediu sau ușor, cu aceeași probabilitate. Dacă, însă dă un test mediu sau ușor, atunci următorul test va fi dificil cu probabilitate 0.5 și mediu sau ușor cu aceeași probabilitate 0.25. Construiți un lanț Markov corespunzător și determinați probabilitățile de echilibru ale stărilor. (*Indicație: stările vor fi: ultimul test dat a fost dificil, mediu, respectiv ușor.*)
10. Un muzeu are în custodie trei pânze de Renoir, două de Cézanne și una de Monet, dar are spațiu pentru a expune doar una dintre aceste pânze. Astfel că tabloul expus este schimbat în fiecare lună cu unul dintre celelalte cinci aleator și uniform. Găsiți matricea de tranziție a acestui lanț Markov.

## Lanțuri Markov - exerciții

11. Refaceți exercițiul anterior în următoarele condiții: următorul tablou expus este ales aleator și uniform dintre tablourile unui alt pictor (diferit de cel curent).

12. Un hipermarket poate vinde în fiecare zi o cantitate foarte mare de bunuri, o cantitate medie sau o cantitate mică; în anumite zile hipermarketul se închide pentru reprovizionare. Dacă o zi are vânzări foarte mari atunci a doua zi va fi de aprovizionare, cu probabilitate 0.8 sau va fi o zi cu vânzări mici, cu probabilitate 0.2. După o zi cu vânzări medii urmează o zi cu vânzări mari (cu probabilitate 0.4) sau una cu vânzări medii (0.6). După o zi cu vânzări mici sau după o aprovizionare urmează o zi cu vânzări mici, medii sau mari cu probabilitate 0.3, 0.3, respectiv 0.4.

- (a) Construiți un lanț Markov, desenați digraful de tranziție și arătați că există o singură clasă recurentă, neperiodică.
- (b) Determinați probabilitățile de echilibru ale stărilor.

## Lanțuri Markov - exerciții

13\*. (Difuzia Ehrenfest) într-o urnă avem  $n$  bile, unele albe și unele negre. La fiecare pas, fie, cu probabilitate  $p \in (0, 1)$ , scoatem din urnă o bilă și o înlocuim în urnă cu o bilă de cealaltă culoare, fie nu facem nimic, cu probabilitate  $(1 - p)$ . Scrieți ecuațiile de echilibru. Care sunt probabilitățile de echilibru pentru  $n = 3$ ?

(Indicație: starea  $s_i$  va fi: în urnă sunt  $i$  bile albe,  $0 \leq i \leq n$ .)

14\*. Un profesor superstițios care lucrează într-o clădire circulară cu  $m$  uși ( $m$  impar), nu folosește niciodată de două ori la rând aceeași ușă. El folosește cu probabilitate  $p$  (respectiv  $(1 - p)$ ) ușa alăturată în sens orar (respectiv antiorar) ușii utilizate ultima oară. Care este probabilitatea ca o anumită ușă să fie utilizată într-un viitor foarte îndepărtat?

(Indicație: starea  $s_i$ : ultima ușă utilizată a fost ușa  $i$ ; trebuie găsite probabilitățile de echilibru  $\pi_i$ .)

## Lanțuri Markov - exerciții

15. Un controler tratează cererile de citire scriere (read-write) pe un suport de memorie de la trei procese diferite. Condițiile sunt de așa natură că fiecare proces are un număr nelimitat de astfel de cereri. După satisfacerea unei cereri a procesului  $j$  controlerul tratează o cerere a procesului  $j$  cu probabilitate  $p_{ij}$ , unde  $P = (p_{ij})$  este următoarea matrice

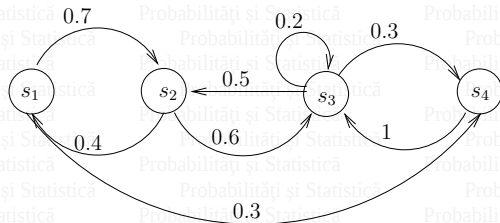
$$\begin{bmatrix} 0.1 & 0.4 & 0.5 \\ 0.3 & 0.2 & 0.5 \\ 0.7 & 0.2 & 0.1 \end{bmatrix}$$

Presupunem că o scriere/citire durează un același timp constant.

- Modelați această situație ca un lanț Markov cu trei stări și desenați digraful corespunzător.
- Determinați probabilitățile de echilibru, dacă acestea există.

## Lanțuri Markov - exerciții

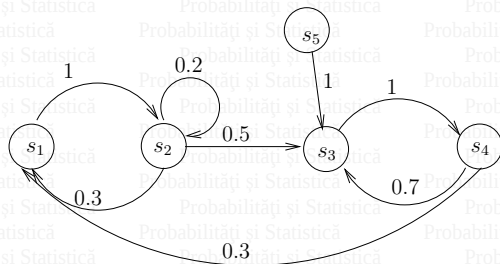
16. În desenul de mai jos este trasat digraful unui lanț Markov discret și omogen.



- (a) Determinați matricea de tranziție corespunzătoare, clasele recurente și stările tranzitorii.
- (b) Dacă există o singură clasă recurentă neperiodică, determinați probabilitățile de echilibru ale stărilor.

## Lanțuri Markov - exerciții

17. În desenul de mai jos este trasat digraful unui lanț Markov discret și omogen.



- (a) Determinați matricea de tranziție corespunzătoare, clasele recurente și stările tranzitorii.
- (b) Dacă există o singură clasă recurentă neperiodică, determinați probabilitățile de echilibru ale stărilor.

## Lanțuri Markov - exerciții

18. Se dă un lanț Markov omogen cu patru stări a cărui matrice de tranziție este următoarea:

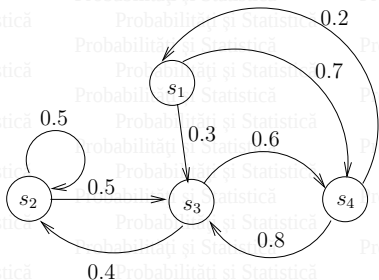
$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0.4 & 0 & 0.6 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0.3 & 0 & 0 & 0.7 \end{bmatrix}$$

- Desenați digraful de tranziție.
  - Determinați clasele recurente și stările tranzitorii.
  - Există vreo clasă periodică?
19. Rezolvați același exercițiu pentru matricea de tranziție de mai jos:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0.2 & 0.6 & 0.2 \\ 0.2 & 0.6 & 0 & 0.2 \\ 0 & 0.4 & 0.6 & 0 \\ 0 & 0.3 & 0.7 & 0 \end{bmatrix}$$

## Lanțuri Markov - exerciții

20. În desenul de mai jos este trasat digraful unui lanț Markov discret și omogen.



- (a) Determinați matricea de tranziție corespunzătoare, clasele recurente și stările tranzitorii.
- (b) Dacă există o singură clasă recurentă neperiodică, scrieți sistemul de ecuații care conduc la determinarea probabilităților de echilibru ale stărilor.



## Lanțuri Markov - exerciții

21. Un student învață în fiecare zi una, două ore sau deloc. Dacă studiază doua ore într-o zi, atunci în ziua următoare, cu probabilitate 0.75 nu va studia deloc și cu probabilitate 0.25 va studia doar o oră. Dacă într-o zi studiază o oră, în ziua următoare, cu probabilitate 0.3 nu va studia deloc și cu probabilitate 0.3 va studia doar o oră. Dacă nu învață deloc într-o anumită zi, în următoarea va învăța o oră cu probabilitate 0.75 sau nu va învăța deloc. Un lanț Markov se poate defini identificând o stare cu numărul de ore de studiu dintr-o anumită zi.







- (a) Desenați digraful de tranziție, determinați matricea de tranziție și indicați clasele recurente și stările tranzitorii.
- (b) Dacă există distribuția staționară scrieți sistemul de ecuații care conduce la determinarea probabilităților de echilibru ale stărilor.

## Lanțuri Markov - exerciții

22. O galerie de artă modernă are în fiecare lună un alt tip de expoziție: de pictură, de sculptură sau de fotografie. După o expunere de tablouri urmează cu șanse egale una de fotografii sau de sculpturi. După o expoziție fotografică probabilitatea de a avea o expoziție de sculptură este de două ori mai mare decât aceea de a avea una de pictură. După o expoziție de sculptură urmează întotdeauna una de pictură. Se poate defini un lanț Markov identificând o stare cu tipul expoziției dintr-o anumită lună.

- (a) Determinați digraful de tranziție, matricea de tranziție și indicați clasele recurente și stările tranzitorii.
- (b) Dacă există distribuția staționară (justificați) scrieți sistemul de ecuații care conduce la determinarea probabilităților de echilibru ale stărilor.

## Bibliography I

-  Bertsekas, D. P., J. N. Tsitsiklis, *Introduction to Probability*, Athena Scientific, 2002.
-  Gordon, H., *Discrete Probability*, Springer Verlag, New York, 1997.
-  Johnson, J. L., *Probability and Statistics for Computer Science*, Wiley Interscience, 2008.
-  Lipschutz, S., *Theory and Problems of Probability*, Schaum's Outline Series, McGraw-Hill, 1965.
-  Mitzenmacher, M., E. Upfal, *Probability and Computing: Randomized Algorithms and Probabilistic Analysis*, Cambridge University Press, 2005.
-  Ross, S. M., *A First Course in Probability*, Prentice Hall, 5th edition, 1998.

## Bibliography II



Stone, C. J., *A Course in Probability and Statistics*, Duxbury Press, 1996.