Probabilităţi şi statistică - Curs 2

4 martie 2024

Table of contents

Probabilitatea condiţionată şi independenţă

- În acest capitol analizăm modul în care un eveniment aleator, despre care ştim deja că s-a realizat, influenţează sau nu şansele de realizare ale unor alte evenimente.
- Noţiunile de condiţionare şi independenţă permit calcularea probabilităţilor unor evenimente aleatoare prin intermediul altora.
- Aceste noţiuni sunt printre cele mai importante concepte ale teoriei probabilităţilor.
- În lipsa acestor două noţiuni teoria probabilităţilor ar fi doar o teorie despre măsură a submulţimilor unei mulţimi Ω.

Probabilitatea condiţionată şi independenţă

Exemplu:

- Să presupunem că se aruncă două zaruri şi că putem observa valoarea primului dintre zaruri: 5. Având la îndemână această informaţie, care este probabilitatea ca suma celor două zaruri să fie cel mult 7?
- Raţionamentul este următorul: ştiind ca primul dintre zaruri este 5, rezultatele posibile a experimentului sunt $(5,1)$, $(5,2)$, $(5,3)$, $(5,4)$, $(5,5)$ şi $(5,6)$.
- În continuare, cunoscând că valoarea primului zar este 5, fiecare dintre aceste evenimente elementare are aceeaşi probabilitate: $1/6$; probabilitatea căutată este $2/6$. ♣

Probabilitate condiţionată

Definiţia 1

Fie A şi B două evenimente aleatoare, probabilitatea condiţionată *de a se realiza A ştiind că s-a realizat B este*

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, (B \neq \varnothing).$$

$P(A|B)$ *se mai numeşte probabilitatea lui A condiţionat de evenimentul B. A este evenimentul condiţionat, iar B este evenimentul care condiţionează.*

Exemplu. Două cifre sunt alese la întâmplare dintre cele nouă cifre de la 1 la 9. Dacă suma este pară, care este probabilitatea ca unul dintre cele două numere să fie par?

Soluţie: Numerele pare sunt $\{2, 4, 6, 8\}$; dacă suma este pară şi unul dintre numere este par, atunci amândouă sunt pare.

Probabilitate condiţionată

Există $\binom{4}{2} = 6$ moduri de a alege două numere pare diferite şi $\binom{5}{2} = 10$ moduri de a alege două numere impare diferite (numerele impare sunt $\{1, 3, 5, 7, 9\}$). Probabilitatea este

$$\frac{\binom{4}{2}}{\binom{4}{2} + \binom{5}{2}} = \frac{6}{6+10} = 0.375. \clubsuit$$

Exemplu. Într-o urnă sunt 4 bile albe (două numerotate cu 1, două cu 2), 5 galbene (trei numerotate cu 1, două cu 2) şi 6 negre (două numerotate cu 1, patru cu 2). O bilă este extrasă la întâmplare din urnă.

Probabilitate condiţionată

(a) Dacă bila extrasă nu este neagră, care este probabilitatea ca ea să fie albă?

(b) Dacă bila extrasă are numărul 2, care este probabilitatea ca ea să nu fie albă?

Soluţie:

(a) Dacă bila extrasă nu este neagră, rămân nouă bile posibile, iar dintre acestea patru sunt albe. Probabilitatea este $4/9$.

(b) Dacă bila extrasă are numărul 2, spaţiul posibilităţilor se restrânge la două bile albe, două bile galbene şi patru bile negre (putem presupune că urna are acest conţinut). Probabilitatea de a extrage o bilă galbenă sau neagră este $6/8 = 0.75$. ♣

Probabilitate condiţionată

Example. O monedă se aruncă de trei ori. Vrem să determinăm probabilitatea condiţionată $P(A|B)$, unde $A =$"banul apare de mai multe ori decât stema", $B =$"la prima aruncare se obţine banul".

Solution: Spaţiul de selecţie este

$$\Omega = \{bbb, bbs, bsb, bss, sbb, sbs, ssb, sss\}.$$

Astfel, $B = \{bbb, bbs, bsb, bss\}$, $A = \{bbb, bbs, bsb, sbb\}$, $A \cap B = \{bbb, bbs, bsb\}$.

$$P(B) = \frac{4}{8}, P(A \cap B) = \frac{3}{8}, P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{3}{4}.$$

Deoarece toate rezultatele sunt echiprobabile putem calcula $P(A|B)$ mai rapid. Putem evita să calculăm $P(B)$ şi $P(A \cap B)$ împărţind numărul de rezultate elementare din $A \cap B$ (care este 3) la numărul de rezultate elementare ale lui B (care este 4).

Evenimente independente

- În multe cazuri probabilitatea $P(A|B)$ este diferită de $P(A)$ - care este probabilitatea necondiţionată a evenimentului A. Asta înseamnă că realizarea evenimentului B influenţează într-adevăr şansele de producere a evenimentului A.
- Atunci când $P(A) = P(A|B)$ putem spune că evenimentul A este independent de B (vom vedea că relaţia aceasta este simetrică). Altfel spus, A este independent de B dacă realizarea evenimentului B nu schimbă probabilitatea realizării evenimentului A.

Definiţia 2

Două evenimente A şi B se numesc independente *dacă*

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) \tag{1}$$

Evenimente independente

- Dacă B este un eveniment posibil (adică $P(B) > 0$) şi $P(A|B) = P(A)$, atunci A şi B sunt independente conform definiţiei (care include şi posibilitatea ca unul dintre cele două evenimente să fie imposibil).
- În fapt, evenimentul imposibil, $\varnothing$, este independent de orice alt eveniment; la fel, evenimentul sigur, Ω, este independent de orice alt eveniment.
- Independenţa se poate verifica folosind ecuaţia (1), dar există şi situaţii în care aceasta rezultă direct din enunţul problemei pe baza independenţei "fizice" a celor două evenimente aleatoare, aşa cum arată următorul exerciţiu.

Evenimente independente - exemple

Exemplu. Se aruncă două zaruri; fie $A =$" primul zar are un număr par" şi $B =$"al doilea zar este cel puţin trei". Să se arate că cele două evenimente sunt independente.

Soluţie: Intuitiv, cele două evenimente sunt independente deoarece rezultatul obţinut pe un zar nu are vreo legătură cu cel de-al doilea (aruncarea primului zar poate fi făcută înaintea celui de-al doilea!). Chiar fără a calcula probabilităţile implicate in ecuaţia (1) putem spune că A şi B sunt independente. ♣

- În anumite situaţii însă această independenţă fizică nu există şi intuiţia nu funcţionează - nu putem afirma independenţa înainte de a a calcula probabilităţile implicate.
- Următoarele exemple subliniază acest lucru.

Evenimente independente - exemple

Exemplu. Considerăm un pachet de (52 de) cărţi de joc din care se extrage la întâmplare o carte. Fie A ="cartea extrasă este un zece" şi B =" cartea extrasă este caro". Să se arate că cele două evenimente sunt independente.

Soluţie: $P(A) = \dfrac{4}{52}$, $P(B) = \dfrac{13}{52} = \dfrac{1}{4}$, iar $P(A \cap B) = \dfrac{1}{52}$ şi $P(A) \cdot P(B) = \dfrac{52}{52 \cdot 52} = \dfrac{1}{52}$. ♣

Exemplu. Într-o urnă sunt puse următoarele cărţi: un valet de treflă, o damă de caro, un trei de pică şi un opt de inimă. O carte este extrasă la întâmplare din această urnă; fie A ="cartea extrasă are culoare roşie" şi B ="cartea extrasă este o figură". Să se analizeze independenţa evenimentelor A şi B.

Soluţie: Nici în acest caz independenţa nu se poate afirma direct; $P(A) = P(B) = \dfrac{1}{2}$, $P(A \cap B) = \dfrac{1}{4}$, de aici rezultă independenţa. ♣

Evenimente independente

Propoziţia 1

Dacă evenimentele A şi B sunt independente, atunci la fel sunt şi perechile de evenimente $(A, \overline{B})$, $(\overline{A}, B)$ şi $\overline{A}, \overline{B})$.

proof: Ştim că $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$; considerăm doar prima pereche (pentru celelalte e similar): $P(A) \cdot P(\overline{B}) = P(A) \cdot [1 - P(B)] = P(A) - P(A \cap B) = P(A \setminus B) = P(A \cap \overline{B})$ ∎

Definiţia 3

Evenimentele aleatoare $(A_i)_{i \in I}$ se numesc independente în ansamblu *dacă*

$$P\left(\bigcap_{j=1}^{k} A_{i_j}\right) = P(A_{i_1}) \cdot P(A_{i_2}) \cdot \ldots \cdot P(A_{i_k}),$$

pentru orice $\{i_1, i_2, \ldots, i_k\} \subseteq I$, unde $k \in \mathbb{N}, k \geqslant 2$.

Evenimente independente în ansamblu

Propoziţia 2

Dacă evenimentele $(A_i)_{i\in I}$ *sunt independente în ansamblu şi* (I_1, I_2) *este o partiţie a lui* I, *atunci evenimentele* $(A_i)_{i\in I_1} \cup (\overline{A}_i)_{i\in I_2}$ *sunt de asemeni independente în ansamblu.*

proof: (Schiţă) Este suficient să demonstrăm propoziţia pentru mulţimi I finite. Utilizăm Propoziţia 1 şi proprietatea: dacă $A_1, A_2, \ldots, A_k, A_{k+1}$ sunt independente în ansamblu, atunci şi $A_1, A_2, \ldots, A_k \cap A_{k+1}$ sunt independente în ansamblu. Demonstraţia este prin inducţie după $|I|$. ■

- Independenţa în ansamblu este o condiţie foarte tare şi ea se verifică destul de rar în practică.
- De cele mai multe ori independenţa în ansamblu este validată cel mai uşor sesizând independenţa "fizică" (datorată eventual unui experiment aleator secvenţial).

Independenţă condiţionată

Propoziţia 3

Probabilităţile condiţionate de un eveniment aleator particular, A, definesc o funcţie de probabilitate pe un nou spaţiu, A.

proof: (Schiţă) Fie A un eveniment aleator particular posibil, definim $Q : \mathcal{P}(A) \to [0,1]$ prin $Q(B) = P(B|A)$, pentru orice $B \subseteq A$. Verificarea faptului că funcţia Q satisface cele trei axiome ale probabilităţii este lăsată ca exerciţiu. ∎

Definiţia 4

Fie $C \neq \varnothing$, evenimentele aleatoare A şi B sunt independente condiţionat *de C dacă $P(A \cap B|C) = P(A|C) \cdot P(B|C)$.*

Independenţă condiţionată

Propoziţia 4

Fie $C \neq \emptyset$, evenimentele aleatoare A şi B sunt independente condiţionat de C dacă şi numai dacă $P(A|B \cap C) = P(A|C)$.

proof: Putem presupune fără a restrânge generalitatea (de ce?) că $B \cap C \neq \emptyset$.

$$P(A \cap B|C) = \frac{P(A \cap B \cap C)}{P(C)} = \frac{P(B \cap C) \cdot P(A \cap B \cap C)}{P(B \cap C) \cdot P(C)} =$$

$$= \frac{P(B \cap C)}{P(C)} \cdot \frac{P(A \cap B \cap C)}{P(B \cap C)} = P(B|C) \cdot P(A|B \cap C).$$

Acum, A şi B sunt independente condiţionat de C dacă şi numai dacă $P(B|C) \cdot P(A|B \cap C) = P(A|C) \cdot P(B|C)$, i. e., $P(A|B \cap C) = P(A|C)$. ■

Independenţă condiţionată

- Relaţia $P(A|C \cap B) = P(A|C)$ spune că, dacă se ştie că C s-a produs deja, atunci informaţia suplimentară că şi B s-a produs nu schimbă probabilitatea evenimentului A.
- Independenţa necondiţionată a două evenimente aleatoare A şi B nu are neapărat drept consecinţă independenţa condiţionată şi nici invers.

Formula probabilităţii totale

Propoziţia 5

(Formula probabilităţii totale) Fie $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ evenimente aleatoare care realizează o partiţie a evenimentului sigur ($\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i = \Omega$ şi $A_i \cap A_j = \varnothing$, $\forall\, i \neq j$). Dacă B este un eveniment oarecare, atunci

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) \cdot P(B|A_i),$$

dacă toate evenimentele care condiţionează sunt posibile.

dem: $P(B) = P(B \cap \Omega) = P\left[B \cap \left(\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i\right)\right] = P\left[\bigcup\limits_{i=1}^{n} (B \cap A_i)\right]$

$$= \sum_{i=1}^{n} P(B \cap A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) \cdot P(B|A_i).$$

Formula probabilităţii totale - exemple

Exemplu. Urna U_1 conţine trei bile albe şi cinci bile negre, iar urna U_2 patru bile albe şi şase bile negre. Se extrage o bilă dintr-una din urne aleasă la întâmplare (urnele sunt identice la exterior). Care este probabilitatea ca bila să fie albă?

Soluţie: Notăm A_i ="extragerea se face din urna U_i" $(i = \overline{1,2})$ şi B ="bila extrasă este albă". $A_1 \cup A_2 = \Omega$, $A_1 \cap A_2 = \varnothing$ şi putem presupune că $P(A_1) = P(A_2) = 1/2$. Atunci

$$P(B) = P(A_1) \cdot P(B|A_1) + P(A_2) \cdot P(B|A_2), \text{ iar}$$

$$P(B|A_1) = \frac{3}{8},\ P(B|A_2) = \frac{4}{10}, \text{ deci}$$

$$P(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{8} + \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{10} = \frac{31}{80}. \clubsuit$$

Formula probabilităţii totale - exemple

Example. Se aruncă un zar. Dacă rezultatul este 1 sau 2, zarul mai este aruncat o dată. Care este probabilitatea ca suma totală aruncărilor (sau aruncării) să fie cel puţin 4?

Soluţie: Fie $A_i =$"rezultatul primei aruncări este i" ($i = \overline{1,6}$) şi $B =$"suma totală este cel puţin 4". $\bigcup_{i=1}^{6} A_i = \Omega$, $A_i \cap A_j = \varnothing, \forall i \neq j$ şi $P(A_i) = 1/6$.

Avem $P(B) = \sum_{i=1}^{6} P(A_i) \cdot P(B|A_i)$. Dat evenimentul A_1, suma totală va fi cel puţin 4 dacă la a doua aruncare obţinem cel puţin 3; dat evenimentul A_2, suma totală va fi cel puţin 4 dacă la a doua aruncare obţinem cel puţin 2:

$$P(B|A_1) = \frac{4}{6},\ P(B|A_2) = \frac{5}{6}, P(B|A_3) = 0, P(B|A_i) = 1, i = \overline{4,6}$$

$$P(B) = \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{4}{6} + \frac{5}{6} + 1 + 1 + 1\right) = \frac{27}{36}. \clubsuit$$

Formula lui Bayes

Propoziţia 6

(Formula lui Bayes) Fie $A_1, A_2, \ldots, A_n$ evenimente aleatoare care realizează o partiţie a evenimentului sigur şi B un eveniment oarecare, atunci

$$P(A_k|B) = \frac{P(A_k)\cdot P(B|A_k)}{\sum\limits_{i=1}^{n} P(A_i)\cdot P(B|A_i)},$$

dacă toate evenimentele care condiţionează sunt posibile. ($P(B|A_k)$ se numesc probabilităţi a priori, iar $P(A_k|B)$ sunt numite probabilităţi a posteriori.)

dem: $P(A_k|B) = \dfrac{P(A_k \cap B)}{P(B)} = \dfrac{P(B|A_k)\cdot P(A_k)}{P(B)} =$

$$= \frac{P(A_k)\cdot P(B|A_k)}{\sum\limits_{i=1}^{n} P(A_i)\cdot P(B|A_i)}.$$

Formula lui Bayes - exemple

Exemplu. Într-o urnă sunt patru zaruri: unul are numărul 3 pe exact patru dintre feţe, două au numărul 3 pe exact trei dintre feţe iar ultimul zar este normal. Un zar este ales la întâmplare şi se aruncă o dată.

(a) Care este probabilitatea ca la aruncarea zarului să apară numărul 3?

(b) Dacă la aruncarea zarului s-a obţinut numărul 3, care este probabilitatea ca zarul ales să fi fost cel normal?

Soluţie: Notăm A_1 ="zarul ales are numărul 3 pe exact patru dintre feţe", A_2 ="zarul ales are numărul 3 pe exact trei dintre feţe", A_3 ="zarul ales este normal" şi B ="la aruncarea zarului ales apare numărul 3".

Formula lui Bayes - exemple

$A_1 \cup A_2 \cup A_3 = \Omega$, $A_i \cap A_j = \varnothing$, pentru orice $i \neq j$ şi $P(A_1) = P(A_3) = 1/4$, $P(A_2) = 2/4$.
Probabilităţile a priori sunt

$$P(B|A_1) = \frac{4}{6},\ P(B|A_2) = \frac{3}{6}, P(B|A_3) = \frac{1}{6}.$$

(a) Probabilitatea cerută este:

$$P(B) = \sum_{i=1}^{3} P(A_i)P(B|A_i) = \frac{1}{4} \cdot \frac{4}{6} + \frac{2}{4} \cdot \frac{3}{6} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{6} = \frac{11}{24}.$$

(b) Probabilitatea a posteriori cerută este

$$P(A_3|B) = \frac{P(A_3) \cdot P(B|A_3)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{6}}{\frac{11}{24}} = \frac{1}{11}. \clubsuit$$

Formula lui Bayes - exemple

Exemplu. Se dau două urne; prima conţine 3 bile roşii, 2 albastre şi 3 negre, iar a doua conţine 2 bile albe, 2 albastre şi 3 negre. Din prima urnă se extrage o bilă şi se pune în cea de-a doua urnă, apoi se extrage o bilă din cea de-a doua urnă.

(a) Dacă a doua bilă extrasă este neagră care este probabilitatea ca prima să fi fost albastră?

(b) Dacă a doua bilă extrasă este roşie care este probabilitatea ca prima să fi fost albastră?

(c) Dacă a doua bilă extrasă este albă care este probabilitatea ca prima să fi fost roşie?

Soluţie: Notăm $A_1 =$"prima bilă extrasă este roşie", $A_2 =$"prima bilă extrasă este albastră", $A_3 =$"prima bilă extrasă este neagră" şi $B =$"a doua bilă extrasă este neagră", $C =$"a doua bilă extrasă este roşie", $D =$"a doua bilă extrasă este albă".

Formula lui Bayes - exemple

$A_1 \cup A_2 \cup A_3 = \Omega$, $A_i \cap A_j = \varnothing$, pentru orice $i \neq j$ şi $P(A_1) = 3/8$, $P(A_2) = 2/8$, $P(A_3) = 3/8$.

(a) Probabilităţile a priori sunt

$$P(B|A_1) = \frac{3}{8},\ P(B|A_2) = \frac{3}{8}, P(B|A_3) = \frac{4}{8}.$$

Aplicăm mai întâi formula probabilităţii totale:

$$P(B) = \sum_{i=1}^{3} P(A_i)P(B|A_i) = \frac{3}{8}\cdot\frac{3}{8} + \frac{2}{8}\cdot\frac{3}{8} + \frac{3}{8}\cdot\frac{4}{8} = \frac{27}{64}.$$

Apoi formula lui Bayes:

$$P(A_2|B) = \frac{P(A_2)\cdot P(B|A_2)}{P(B)} = \frac{\frac{2}{8}\cdot\frac{3}{8}}{\frac{27}{64}} = \frac{6}{27} = \frac{2}{9}.$$

Formula lui Bayes - exemple

(b) Probabilităţile a priori sunt

$$P(C|A_1) = \frac{1}{8},\ P(C|A_2) = 0, P(C|A_3) = 0.$$

Aplicăm mai întâi formula probabilităţii totale:

$$P(C) = \sum_{i=1}^{3} P(A_i)P(C|A_i) = \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{8} + \frac{2}{8} \cdot 0 + \frac{3}{8} \cdot 0 = \frac{3}{64}.$$

Apoi formula lui Bayes:

$$P(A_2|C) = \frac{P(A_2) \cdot P(C|A_2)}{P(C)} = \frac{\frac{2}{8} \cdot 0}{\frac{3}{64}} = 0.$$

Formula lui Bayes - exemple

(c) Probabilităţile a priori sunt

$$P(D|A_1) = \frac{2}{8},\ P(D|A_2) = \frac{2}{8}, P(D|A_3) = \frac{2}{8}.$$

Aplicăm mai întâi formula probabilităţii totale:

$$P(D) = \sum_{i=1}^{3} P(A_i)P(D|A_i) = \frac{3}{8}\cdot\frac{2}{8} + \frac{2}{8}\cdot\frac{2}{8} + \frac{3}{8}\cdot\frac{2}{8} = \frac{16}{64}.$$

Apoi formula lui Bayes:

$$P(A_1|D) = \frac{P(A_1)\cdot P(D|A_1)}{P(D)} = \frac{\frac{3}{8}\cdot\frac{2}{8}}{\frac{16}{64}} = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}.\clubsuit$$

Formula probabilităţii totale - versiunea condiţionată

Propoziţia 7

$$P(A|B) = P(C|B) \cdot P(A|B \cap C) + P(\overline{C}|B)P(A|B \cap \overline{C}),$$

dacă toate evenimentele care condiţionează sunt posibile.

proof:

$$P(C|B) \cdot P(A|B \cap C) + P(\overline{C}|B)P(A|B \cap \overline{C}) =$$

$$= \frac{P(B \cap C)}{P(B)} \cdot \frac{P(A \cap B \cap C)}{P(B \cap C)} + \frac{P(B \cap \overline{C})}{P(B)} \cdot \frac{P(A \cap B \cap \overline{C})}{P(B \cap \overline{C})} =$$

$$= \frac{P(A \cap B \cap C)}{P(B)} + \frac{P(A \cap B \cap \overline{C})}{P(B)} = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = P(A|B).$$

■

Versiunea condiţionată a formulei probabilităţii totale - exemplu

Exemplu. O urnă conţine două zaruri: unul, (D_1), are numărul 4 pe două dintre feţe, iar celălalt, (D_2), este un zar normal. Se extrage la întâmplare un zar din urnă şi acest zar este aruncat o dată. Dacă se obţine numărul 4, acelaşi zar se mai aruncă încă o dată, altfel se aruncă celălalt zar.

a) Care este probabilitatea ca la acea de-a doua aruncare să obţinem un 4?

b) Dacă la aruncarea a doua se obţine un 4, care este probabilitatea ca zarul extras din urnă să fi fost D_1?

Soluţie. Notăm cu $A =$"la a două aruncare se obţine un 4", $B =$ "primul zar extras din urnă este D_1" şi $C =$"la prima aruncare se obţine un 4".
a) Pentru $P(A)$ folosim formula probabilităţii totale

$$P(A) = P(B) \cdot P(A|B) + P(\overline{B}) \cdot P(A|\overline{B}).$$

Evident, $P(B) = 1/2$.

Versiunea condiţionată a formulei probabilităţii totale - exemplu

Pentru $P(A|B)$ şi $P(A|\overline{B})$ folosim versiunea condiţionată a formulei probabilităţii totale

$$P(A|B) = P(C|B) \cdot P(A|B \cap C) + P(\overline{C}|B)P(A|B \cap \overline{C}),$$

$$P(A|\overline{B}) = P(C|\overline{B}) \cdot P(A|\overline{B} \cap C) + P(\overline{C}|\overline{B})P(A|\overline{B} \cap \overline{C}),$$

$P(C|B) = 1/3, P(\overline{C}|B) = 2/3, P(A|B \cap C) = 1/3, P(A|B \cap \overline{C}) = 1/6,$

$P(C|\overline{B}) = 1/6, P(\overline{C}|\overline{B}) = 5/6, P(A|\overline{B} \cap C) = 1/6, P(A|\overline{B} \cap \overline{C}) = 1/3.$

Astfel, $P(A|B) = 8/36, P(A|\overline{B}) = 11/36, P(A) = 19/72.$

b) Pentru a doua cerinţă folosim formula lui Bayes:

$$P(B|A) = \frac{P(B) \cdot P(A|B)}{P(A)} = \frac{8}{19}.$$

Exerciţii propuse spre rezolvare pentru seminar

- Probabilitate condiţionată şi evenimente independente: I.2, I.3, I.4, I.7, I.8, I.15
- Formula probabilităţii totale şi cea a lui Bayes: II.2, II.3, II.4, II.9
- Rezervă: I.6, I.9, I.12, II.1, II.7

Sfârşit

Exerciţii - Probabilitate condiţionată şi independenţă

I.1. Se aruncă un zar şi se consideră evenimentele $A =$"apare una din feţele 1, 2 sau 3" şi $B =$"apare una din feţele 2, 3, 4 sau 6". Evenimentele A şi B sunt independente?

I.2. Se aruncă două zaruri şi se notează cu a_1 valoarea primului zar şi cu a_2 valoarea celui de-al doilea. Să se arate că evenimentele "$a_1 \geqslant 5$" şi "$a_2 \leqslant 3$" sunt independente.

I.3. Un absolvent de liceu trimite cereri de admitere la Oxford şi la Cambridge. El ştie că Oxford îl va accepta cu probabilitate 0.4, iar Cambridge cu probabilitate 0.3. Ştie de asemenea că va fi acceptat de ambele universităţi cu probabilitate 0.2.

(a) Care este probabilitatea să fie aceptat de Cambridge dacă se ştie că a fost acceptat de Oxford?

(b) Evenimentele "este acceptat de Oxford" şi "este acceptat de Cambridge" sunt compatibile? Dar independente?

Exerciţii - Probabilitate condiţionată şi independenţă

I.4. Se aruncă trei monede identice.

(a) Evenimentele "stema pe prima monedă" şi "valoarea pe ultimele două" sunt independente?

(b) Dar evenimentele "valoarea pe exact două monede" şi "valoarea pe toate monedele"?

I.5. Trei sportivi trag asupra unei ţinte; primul nimereşte ţinta cu probabilitatea $\frac{2}{3}$, al doilea cu probabilitatea $\frac{3}{4}$, iar al treilea cu probabilitatea $\frac{4}{5}$ (aceste evenimente sunt independente în ansamblu). Care este probabilitatea ca ţinta să fie atinsă

(a) de exact trei ori,

(b) de exact două ori,

(c) respectiv, măcar o dată?

Exerciţii - Probabilitate condiţionată şi independenţă

I.6. Probabilitatea ca un student să promoveze examenul este $2/5$, ca studentul aflat la dreapta lui să promoveze este $3/5$, iar ca studentul aflat la stânga să promoveze este $1/5$. Presupunem că studenţii nu se influenţează reciproc în timpul examenului. Care este probabilitatea ca exact doi studenţi să promoveze? Dar ca studentul din mijloc să promoveze ştiind că cel din stânga a promovat?

I.7. O urnă conţine 3 bile albe (două numerotate cu 1 şi una numerotată cu 2) şi 5 bile negre (două numerotate cu 1 şi trei numerotate cu 2). Se extrage din urnă o bilă.

(a) Dacă bila este albă care este probabilitatea ca ea să fie numerotată cu 1?

(b) Dacă bila este numerotată cu 2 care este probabilitatea ca ea să fie albă?

Exerciţii - Probabilitate condiţionată şi independenţă

I.8. O urnă conţine 16 bile numerotate de 1 la 16 colorate astfel: $\underbrace{1,2,4,5,16}_{albe},\underbrace{3,6,7,\ldots 13}_{negre},\underbrace{14,15}_{verzi}$. Se extrage o bilă din urnă. Se consideră evenimentele A ="bila extrasă este neagră" şi B ="bila extrasă are un număr mai mare sau egal cu 10".

Să se calculeze probabilităţile evenimentelor $A|B$, $A|\overline{B}$, $\overline{A}|B$, $\overline{A}|\overline{B}$.

I.9. Arătaţi că evenimentele A şi B sunt independente dacă

$$\frac{1}{P(A)}+\frac{1}{P(B)}=\frac{P(A)}{P(A\cap B)}+\frac{P(B)}{P(A\cap B)}.$$

I.10. Fie A şi B evenimente aleatoare posibile (i.e., cu probabilitate nenulă). Arătaţi că

(a) $P(\overline{A}\cup\overline{B})=1-P(B)P(A|B)$;

(b) $P(A\cup B|A\cap\overline{B})=P(A|A\cap\overline{B})P(B|\overline{A}\cap B)$;

Exerciţii - Probabilitate condiţionată şi independenţă

(c) $\dfrac{P(A|A\cup B)}{P(B|A\cup B)} = \dfrac{P(A)}{P(B)}$;

(d) $\dfrac{P(\overline{B}|A)}{P(B)} + \dfrac{P(\overline{A})}{P(A)} = \dfrac{P(\overline{A}|B)}{P(A)} + \dfrac{P(\overline{B})}{P(B)}$.

(e) $\dfrac{P(A\cap C|B)}{P(\overline{A}\cup \overline{C}|B)} = \dfrac{P(A\cap C)}{P(\overline{A}\cup \overline{C})}\dfrac{P(B|A\cap C)}{P(B|\overline{A}\cup \overline{C})}$.

I.11. Se dau trei evenimente aleatoare A_i, $i=\overline{1,3}$, astfel încât

$$P(A_1\cap A_2\cap A_3) = P(A_1)\cdot P(A_2)\cdot P(A_3),$$

$$P(\overline{A}_1\cap A_2\cap A_3) = P(\overline{A}_1)\cdot P(A_2)\cdot P(A_3),$$

$$P(A_1\cap \overline{A}_2\cap A3) = P(A_1)\cdot P(\overline{A}_2)\cdot P(A_3),$$

$$P(A_1\cap A_2\cap \overline{A}_3) = P(A_1)\cdot P(A_2)\cdot P(\overline{A}_3).$$

Arătaţi că cele trei evenimente sunt independente în ansamblu.

Exerciţii - Probabilitate condiţionată şi independenţă

I.12. Dacă evenimentele aleatoare A, B şi C sunt independente în ansamblu, atunci la fel sunt şi evenimentele A, B şi $\overline{C}$.

I.13. Fie A_1, A_2 şi A_3 $(P(A_3) > 0)$ trei evenimente aleatoare independente în ansamblu. Demonstraţi că

(a) $P(A_1 \cap A_2 | A_3) = P(A_1|A_3)P(A_2|A_3)$ şi

(b) $P(A_1 \cup A_2 | A_3) = P(A_1|A_3) + P(A_2|A_3) - P(A_1 \cap A_2|A_3)$.

I.14. Evenimentele A_1, A_2, A_3, A_4 sunt independente în ansamblu şi $P(A_3 \cap A_4) > 0$. Arătaţi că $P(A_1 \cup A_2 | A_3 \cap A_4) = P(A_1 \cup A_2)$.

I.15. O monedă se aruncă de două ori. Se definesc evenimentele $A =$"apare stema la prima aruncare", $B =$"apare stema la cea de-a doua aruncare" şi $C =$"la cele două aruncări avem rezultate diferite". Arătaţi că cele trei evenimente aleatoare sunt mutual independente fără a fi independente în ansamblu.

Exerciţii - Probabilitate condiţionată şi independenţă

I.16. Se aruncă pe rând două monede. Probabilitatea de a obţine stema la amândouă aruncările este $1/8$, iar cea de de a obţine stema la amândouă aruncările ştiind că la cel puţin una dintre aruncări s-a obţinut stema este $3/14$. Care sunt probabilităţile de a obţine stema pentru prima şi a doua monedă?

I.17. Un zar se aruncă de două ori; definim $A =$"la prima aruncare se obţine 1, 3 sau 5", $B =$"la prima aruncare se obţine 3, 4 sau 5", $C =$"suma este 3 sau 7". Arătaţi că $P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)$ dar A, B şi C nu sunt independente în ansamblu.

I.18*. Daţi exemplu de trei evenimente aleatoare A, B şi C astfel încât $P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)$ şi $P(\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}) \neq P(\overline{A}) \cdot P(\overline{B}) \cdot P(\overline{C})$.

I.19. Se consideră un experiment cu rezultate echiprobabile astfel încât $|\Omega|$ este prim. Arătaţi că nu pot exista evenimente aleatoare netriviale (i. e., $\neq \varnothing, \Omega$) independente.

Exerciţii - Formula probabilităţii totale şi formula lui Bayes

II.1. Se dau patru urne identice la exterior, conţinând: U_1 - 4 bile albe şi 5 bile negre; U_2 - 3 bile albe şi 7 bile negre; U_3 - 2 bile albe şi 4 bile negre; U_4 - 3 bile albe şi 5 bile negre. Dintr-una dintre cele patru urne, la întâmplare, se extrage o bilă.

(a) Să se calculeze probabilitatea ca bila extrasă să fie albă.

(b) Dacă bila extrasă este neagră să se calculeze probabilitatea ca ea să provină din urna U_2.

II.2. Probabilitatea ca o uşă să fie încuiată este $1/2$. Cheia de la această uşă se găseşte pe un panou unde sunt 12 chei. Alegem la întâmplare două chei de pe panou.

(a) Care este probabilitatea ca uşa să poată fi deschisă (fără a ne întoarce după o altă cheie)?

(b) Dacă am deschis uşa, care este probabilitatea ca ea să fi fost încuiată?

Exerciţii - Formula probabilităţii totale şi formula lui Bayes

II.3. Într-o urnă sunt trei monede: una dintre ele (M_1) are probabilitatea de apărea stema la o aruncare egală cu $1/4$, o a doua (M_2) are această probabilitate egală cu $3/4$, iar cea de-a treia (M_3) este o monedă normală. Din urnă se extrage la întâmplare o monedă care se aruncă o dată.

a) Care este probabilitatea ca în urma aruncării să apară stema?

b) Dacă se obţine stema, care este probabilitatea ca moneda extrasă din urnă să fi fost M_1?

II.4. Într-o urnă sunt patru zaruri: unul dintre ele (Z_1) are numărul 6 pe toate feţele, un al doilea (Z_2) are numărul 6 pe trei dintre feţe şi numărul 3 pe celelalte trei feţe, iar celelalte două zaruri (Z_3, Z_4) sunt normale. Din urnă se extrage la întâmplare un zar care se aruncă o dată.

(a) Care este probabilitatea ca să apară faţa cu numărul 6?

(b) Dacă se obţine faţa cu numărul 6, care este probabilitatea ca zarul extras din urnă să fi fost Z_2?

Exerciţii - Formula probabilităţii totale şi formula lui Bayes

II.5. Într-o urnă sunt patru pachete de cărţi: unul dintre ele (P_1) conţine doar 5 de treflă (52 de cărţi identice), al doilea şi al treilea pachet (P_2, P_3) sunt normale, iar ultimul (P_4) conţine doar aşi de treflă (52 de cărţi identice). Din urnă se extrage la întâmplare un pachet, apoi din pachet se extrage o carte.

(a) Care este probabilitatea de a obţine un număr de treflă?

(b) Dacă s-a obţinut un as, care este probabilitatea ca pachetul extras din urnă să fie P_2 sau P_3?

II.6. Într-o urnă sunt trei monede: una are stema pe ambele feţe, una are banul pe ambele feţe, iar ultima este obişnuită. Se extrage din urnă o monedă, care apoi se aruncă şi se reţine faţa obţinută.

(a) Care este probabilitatea de a obţine banul?

(b) Dacă s-a obţinut stema, care este probabilitatea ca moneda extrasă să fi fost cea normală?

Exerciţii - Formula probabilităţii totale şi formula lui Bayes

II.7. O urnă conţine o bilă albă şi două bile roşii. Se extrage o bilă din urnă şi se procedează astfel: dacă bila este albă, ea se pune înapoi împreună cu o altă bilă albă; dacă bila extrasă este roşie, ea este pusă înapoi împreună cu alte două bile roşii. Apoi se mai extrage o bilă din urnă.

(a) Care este probabilitatea ca a două bilă extrasă să fie roşie?

(b) Dacă a doua bilă extrasă este roşie, care este probabilitatea ca prima să fi fost roşie?

II.8. Un informatician cere angajatorului său o recomandare pentru un nou loc de muncă. El estimează că are 50% şanse de a primi noua slujbă cu o recomandare puternică, 40% cu o recomandare moderată şi 20% cu o recomandare slabă. De asemenea consideră că angajatorul săii va oferi o recomandare puternică, moderată sau slabă cu probabilitatea 0.4, 0.4 şi 0.2, respectiv.

(a) Care este probabilitatea ca informaticianul să primească o nouă slu-

Exerciţii - Formula probabilităţii totale şi formula lui Bayes

(b) Dacă primeşte o nouă slujbă, care este probabilitatea să fi avut o recomandare slabă?

II.9. Într-o urnă sunt trei zaruri: două au numărul 5 pe cinci dintre feţe iar celălalt are numărul 5 pe patru feţe. Un zar este extras din urnă şi se aruncă o dată.

(a) Care este probabilitatea ca la aruncare să apară numărul 5?

(b) Dacă la aruncare s-a obţinut numărul 5, care este probabilitatea ca zarul extras să aibă numărul 5 pe patru feţe?

II.10. Se dau două urne: U_1 conţine 3 bile albe, 3 roşii şi 4 bile negre şi U_2 conţine 2 bile albe, 3 roşii şi 2 negre. Din U_1 se extrage o bilă şi se introduce în U_2, apoi se extrage o bilă din U_2.

(a) Care este probabilitatea ca la a doua extragere să obţinem o bilă albă?

(b) Dacă la a doua extragere s-a obţinut o bilă albă, care este probabilitatea ca prima bilă extrasă să fi fost roşie?

Exerciţii - Formula probabilităţii totale şi formula lui Bayes

II.11. Într-o urnă sunt două zaruri: unul are pe trei feţe numărul 3 şi pe celelalte numărul 6, iar celălalt zar este normal. Un zar este ales la întâmplare din urnă; zarul ales se aruncă o dată. Dacă se obţine numărul 6, acelaşi zar este aruncat încă o dată, dacă se obţine un număr diferit de 6, atunci se aruncă celălalt zar.

(a) Care este probabilitatea ca la a doua aruncare să apară numărul 6?

(b) Dacă la a doua aruncare s-a obţinut un 6, care este probabilitatea ca zarul extras să nu fi fost cel normal?

II.12. Avem două zaruri: unul are pe patru feţe numărul 5 şi pe celelalte numărul 2, iar celălalt este normal. Un zar este ales la întâmplare şi se aruncă o dată. Dacă se obţine numărul 5, atunci se aruncă celălalt zar, dacă nu, acelaşi zar se mai aruncă o dată.

(a) Care este probabilitatea ca a doua oară să apară un 5?

(b) Dacă la a doua aruncare nu s-a obţinut un 5, care este probabilitatea ca zarul extras să fi fost cel normal?

Exerciţii - Formula probabilităţii totale şi formula lui Bayes

II.13*. k urne conţin fiecare câte p bile roşii şi q bile albastre. O bilă este extrasă la întâmplare din prima urnă şi introdusă în cea de-a doua, apoi o bilă este extrasă la întâmplare din urna a doua şi introdusă în cea de-a treia etc. La final o bilă se extrage din ultima urnă. Care este probabilitatea ca ultima bilă extrasă să fie albastră?

II.14*. Două urne conţin: una p bile albe şi una p bile negre ($p \geqslant 3$). Se fac două schimburi succesive; un schimb constă din extragerea simultană a câte unei bile din fiecare urnă şi introducerea ei în cealaltă urnă.

(a) Care este probabilitatea ca după cele două schimburi, urnele să aibă acelaşi conţinut.

(b) Dar după patru schimburi succesive?

Exerciţii - Formula probabilităţii totale şi formula lui Bayes

II.15. Fie A şi B două evenimente posibile. Se spune ca A *sugerează* B, dacă $P(A|B) > P(A)$ şi că *nu sugerează* B dacă $P(A|B) < P(A)$.

(a) Să se arate că A sugerează B dacă şi numai dacă B sugerează A.

(b) Dacă $\overline{A}$ este eveniment posibil, atunci A sugerează B dacă şi numai dacă $\overline{A}$ nu sugerează B.

(c) O comoară se găseşte într-unul din două locuri cunoscute cu probabilităţi $\beta \in (0, 1)$ respectiv $(1 - \beta)$. Căutăm mai întâi în primul loc şi găsim comoara cu probabilitate $p > 0$. Arătaţi că evenimentul de a nu găsi comoara în primul loc sugerează că ea se găseşte în cel de-al doilea loc.

Exerciţii - Formula probabilităţii totale şi formula lui Bayes

II.16*. Un anumit curs are o prezenţă scăzută. Profesorul hotărăşte să nu ţină cursul dacă nu sunt prezenţi cel puţin k din cei n studenţi înscrişi la curs. Fiecare student vine la curs independent cu probabilitate p_b dacă vremea este bună şi cu probabilitate p_r dacă vremea este rea. Se cunoaşte probabilitatea, q, ca vremea să fie rea într-o anumită zi.

(a) Calculaţi probabilitatea ca profesorul să îşi ţină cursul într-o anumită zi.

(b) Dacă se ţine cursul într-o anumită zi, care este probabilitatea ca vremea să fi fost rea?

Bibliography

- Bertsekas, D. P., J. N. Tsitsiklis, *Introduction to Probability*, Athena Scietific, 2002.
- Gordon, H., *Discrete Probability*, Springer Verlag, New York, 1997.
- Lipschutz, S., *Theory and Problems of Probability*, Scahaum's Outline Series, McGraw-Hill, 1965.
- Ross, S. M., *A First Course in Probability* , Prentice Hall, 5th edition, 1998.
- Stone, C. J., *A Course in Probability and Statistics*, Duxbury Press, 1996.