

Table of contents

- 1 Teste de semnificație
- 2 Testul Z
 - Testul Z - Inferență asupra mediei
 - Testul Z - Inferență asupra mediei unei populații - Exemplu
- 3 Testul T
 - Testul T - Inferență asupra mediei
 - Testul T - Inferență asupra mediei unei populații - Exemplu
- 4 Inferențe asupra a două populații
- 5 Testul Z (inferențe asupra a două populații)
 - Testul Z - Inferențe asupra a două medii
 - Testul Z - Inferențe asupra a două medii - Exemplu
- 6 Inferențe asupra raportului dintre dispersii
 - Testul F - Inferențe asupra a două dispersii
 - Testul F - Inferență asupra a două dispersii - Exemplu
- 7 Anexă - Testul T - inferențe asupra a două medii
- 8 Bibliografie

Teste de semnificație

Pașii care trebuie urmați pentru a întreprinde un test de semnificație:

- 1-2. Se formulează cele două ipoteze: H_0 și H_a : H_a va fi acceptată dacă H_0 este respinsă.
3. Se alege un nivel de semnificație α - cât de semnificative trebuie să fie evidențele pentru a respinge H_0 .
4. Se calculează statistica sau scorul testului.
5. Se determină valoarea critică.
6. Se compară scorul cu valoarea critică și, dacă este cazul, se respinge H_0 și se acceptă H_a , altfel nu se acceptă H_a .

Testul Z

- Testul Z este un test statistic asupra ipotezelor utilizat pentru statistici care urmează o distribuție normală atunci când ipoteza nulă este adevărată.
- Datorită Teoremei Limite Centrale (TLC) putem folosi testul Z și atunci când populația este aproximativ normală, dar doar pentru eșantioane mari ($n \geq 30$).
- Am utilizat deja un test de tip Z în cazul testului proporției (folosind teorema de Moivre-Laplace care e o consecință a TLC).
- Testul Z se bazează pe distribuția normală; pentru eșantioane mici, acest test de semnificație poate fi utilizat atunci când eșantionul provine dintr-o populație normală sau foarte aproape de una normală.

Testul Z - Inferență asupra mediei unei populații (σ cunoscută)

- Vom considera o populație statistică a cărei dispersie (σ^2) este cunoscută.
- Populația este normal distribuită și dorim să testăm o ipoteză asupra mediei populației.
- Testul poate fi întreprins chiar dacă populația nu este distribuită normal, dacă utilizăm eşantioane destul de mari.
- Dacă μ_0 este media populației (presupusă în ipoteza nulă), atunci următoarea statistică $\frac{\bar{x}_n - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$ este distribuită normal standard: $N(0, 1)$.
- Testul Z are loc astfel:

Testul Z - Inferență asupra mediei unei populații (σ cunoscută)

1. Formulăm *ipoteza nulă*, care susține că media populației ia o anumită valoare:

$$H_0 : \mu = \mu_0$$

2. Formulăm *ipoteza alternativă* conform informațiilor obținute din eșantion. Putem avea trei tipuri de ipoteză alternativă

$$H_a : \mu < \mu_0 \quad (\text{asimetrică la stânga}) \text{ sau}$$

$$H_a : \mu > \mu_0 \quad (\text{asimetrică la dreapta}) \text{ sau}$$

$$H_a : \mu \neq \mu_0 \quad (\text{simetrică}).$$

Ipotezele asimetrice se mai numesc *one-tailed*, iar cea simetrică *two-tailed*.

Testul Z - Inferență asupra mediei unei populații (σ cunoscută)

- Alegem un nivel de semnificație $\alpha \in \{1\%, 5\%\}$.
- Calculăm *scorul z* (*statistica* testului)

$$z = \frac{\bar{x}_n - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}}$$

- Determinăm valoarea critică corespunzătoare lui α :

$z^* = qnorm(\alpha)$ pentru H_a asimetrică la stânga ($z^* < 0$),

$z^* = qnorm(1 - \alpha)$ pentru H_a asimetrică la dreapta ($z^* > 0$),

$z^* = -qnorm(\alpha/2) = qnorm(1 - \alpha/2)$ pentru H_a

simetrică ($z^* > 0$).

Testul Z - Inferență asupra mediei unei populații (σ cunoscută)

6. Comparăm valoarea critică cu scorul z ; dacă scorul z aparține *zonei de respingere*, atunci acceptăm H_a și respingem H_0 . Zonele de respingere sunt:

$(-\infty, z^*]$ pentru H_a asimetrică la stânga,

$[z^*, +\infty)$ pentru H_a asimetrică la dreapta,

$(-\infty, -|z^*|] \cup [|z^*|, +\infty)$ pentru H_a simetrică.

Dacă scorul z nu aparține zonei de respingere spunem că *nu există suficiente dovezi cu nivelul de semnificație α* pentru a respinge ipoteza nulă (*încercarea de a respinge H_0 eșuează*).

Testul Z - Inferență asupra mediei unei populații - Exemplu

Exemplu.

- O colonie de șoareci de laborator constă din câteva mii de animale. Greutatea lor urmează o lege normală cu deviația standard $\sigma = 5g$ și se crede că greutatea lor medie este $30g$.
- Pentru un eșantion de 25 de șoareci se găsește o medie de $32g$; este aceasta valoare semnificativă statistic (cu 5% nivel de semnificație)? dar cu 1% nivel de semnificație?

Soluție.

- Se pare că adevărata medie de greutate a întregii populații este diferită de cea afirmată ($\mu_0 = 30g$).
- Știind că populația urmează o distribuție normală și că deviația standard a populației este cunoscută putem întreprinde un test Z asupra mediei.

Testul Z - Inferență asupra mediei unei populații - Exemplu

- Colectăm informațiile legate de populație și de eșantion: $\mu_0 = 30$, $\sigma = 5$, $n = 25$, $\bar{x}_n = 32$.

1-2. Formulăm ipoteza nulă și o ipoteză alternativă simetrică

$$H_0 : \mu = 30 \quad H_a : \mu \neq 30.$$

3. $\alpha = 0.05$.

4. Scorul z

$$z = \frac{\bar{x}_n - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} = \frac{32 - 30}{5 / \sqrt{25}} = 2.$$

5. Valoarea critică este $z^* = -qnorm(\alpha/2) = 1.9599$, pentru $\alpha = 5\%$.

6. Cum $|z| > |z^*|$, putem respinge ipoteza nulă, și să acceptăm că adevărata medie a populației nu este $\mu_0 = 30$ g.

Testul Z - Inferență asupra mediei unei populații - Exemplu

- Reluăm ultimii doi pași pentru celălalt nivel de semnificație:
- 5'. Pentru $\alpha = 1\%$ valoarea critică este $z^* = -qnorm(\alpha/2) = 2.5758$.
 - 6'. Cum $|z| < |z^*|$, încercarea de a respinge ipoteza nulă eșuează cu 1% nivel de semnificație (nu există suficiente dovezi pentru nivelul de 1% pentru a susține că adevărata medie a populației este diferită de 30g).

Testul Z - Inferență asupra mediei unei populații - Exemplu revăzut

- Privind din nou informațiile din eșantion putem observa că media de selecție, \bar{x}_n , este mai mare decât media presupusă a populației.
- Într-un astfel de caz am putea formula o ipoteză alternativă asimetrică la dreapta.

1-2. Noile ipoteze sunt

$$H_0 : \mu = 30 \text{ și } H_a : \mu > 30.$$

3. $\alpha = 0.05$.

4. Scorul z

$$z = \frac{\bar{x}_n - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} = \frac{32 - 30}{5 / \sqrt{25}} = 2.$$

Testul Z - Inferență asupra mediei unei populații - Exemplu revăzut

5. Valoarea critică: $z^* = qnorm(1 - \alpha) = 1.6448$, pentru $\alpha = 5\%$.
6. Deoarece $z > z^*$, putem respinge ipoteza nulă și să acceptăm că media adevărată a populației este mai mare decât $\mu_0 = 30g$.
- Pentru celălalt nivel de semnificație (1%):
- 5'. Valoarea critică este $z^* = qnorm(1 - \alpha) = 2.3263$.
- 6'. Deoarece $z < z^*$, nu putem respinge ipoteza nulă cu 1% nivel de semnificație (nu există dovezi suficiente cu 1% nivel de semnificație pentru a susține că adevărata media a populației este mai mare decât 30g).

Testul Z - Inferență asupra mediei unei populații - Observații

- Merită observat că pentru diverse niveluri de semnificație putem avea concluzii diferite: ipoteza nulă poate fi respinsă pentru un anumit nivel de semnificație iar cu un alt nivel încercarea poate eșua.
- Dacă ipoteza nulă este respinsă cu 1% nivel de semnificație, atunci va fi respinsă și cu 5%; altfel spus, dacă ipoteza nulă nu poate fi respinsă pentru 5%, nu va putea fi respinsă nici pentru 1%.
- Ipoteza alternativă trebuie formulată conform datelor din eșantion: când $\mu_0 \ll \bar{x}_n$ putem formula o ipoteză alternativă asimetrică la dreapta, $H_a : \mu > \mu_0$, când $\mu_0 \gg \bar{x}_n$ putem formula o ipoteză alternativă asimetrică la stânga, $H_a : \mu < \mu_0$.
- Dacă media de selecție nu este nici atât de mare și nici atât de mică prin comparație cu media presupusă a populației, putem presupune că media este doar diferită de valoarea din ipoteza nulă, $H_a : \mu \neq \mu_0$.

Testul Z - Exerciții

- I. Reluați testul Z pentru exercițiul anterior cu $\bar{x}_n = 27g$ și $\sigma = 6$. (Folosiți ambele nivele de semnificație.)
- II. Se afirmă că studenții unei anumite universități vor obține la un anumit test o medie de 35 de puncte cu $\sigma = 4$. Are această afirmație susținere știind că pentru un eșantion aleator se obțin următoarele rezultate la test: 33, 42, 38, 37, 30, 42? Întreprindeți un test corespunzător pentru $\alpha = 5\%$. Se presupune că rezultatele la acest test sunt normal distribuite.
- III. Conform National Center for Health Statistics, înălțimea medie a femeilor din SUA (care este normal distribuită) este de 63.7 in cu o deviație standard cunoscută de $\sigma = 2.75$ in. Pentru un eșantion aleator simplu de 50 femei care lucrează în domeniul serviciilor medicale se găsește o înălțime de 65.2. Testați ipoteza că media de înălțime a femeilor care lucrează în sănătate este diferită de 63.7 in. 5% nivel de semnificație.

Testul T

- Testul T testează ipotezele statistice pentru statistici care urmează o distribuție Student.
- Testul T se folosește atunci când deviația standard a populației (distribuită normal) este necunoscută.
- Un test T este de asemeni potrivit când avem de-a face cu eșantioane mici ($n < 30$) pentru populații care sunt aproximativ normale (din Teorema Limită Centrală).
- Urmând aceste observații putem spune că un test T pentru media unei populații este complementar unui test Z pentru același parametru.
- În secțiunea următoare descriem testul T pentru media unei populații cu dispersia necunoscută.

Testul T - Inferență asupra mediei unei populații (σ necunoscută)

- Considerăm o populație statistică a cărei dispersie (σ^2) este necunoscută.
- Populația este normal distribuită și dorim să testăm o ipoteză asupra adevăratei medii a populației.
- Testul poate fi întreprins dacă populația are o distribuție foarte apropiată de cea normală, când eșantionul la dispoziție este mic (altfel se utilizează un test Z).
- Dacă μ_0 este media populației (presupusă în ipoteza nulă), atunci următoarea statistică $\frac{\bar{x}_n - \mu_0}{s/\sqrt{n}}$ este distribuită Student cu $(n - 1)$ grade de libertate: $T(n - 1)$.
- O diferență față de un test Z constă în înlocuirea deviației standard a populației, σ , cu deviația standard a eșantionului s .
- Testul T decurge astfel:

Testul T - Inferență asupra mediei unei populații (σ necunoscută)

1. Formulăm mai întâi *ipoteza nulă*, care susține că media populației ia o anumită valoare:

$$H_0 : \mu = \mu_0$$

2. Formulăm *ipoteza alternativă* conform informațiilor obținute din eșantion. Putem avea trei tipuri de ipoteză alternativă

$$H_a : \mu < \mu_0 \quad (\text{asimetrică la stânga}) \text{ sau}$$

$$H_a : \mu > \mu_0 \quad (\text{asimetrică la dreapta}) \text{ sau}$$

$$H_a : \mu \neq \mu_0 \quad (\text{simetrică}).$$

Ipotezele asimetrice se mai numesc *one-tailed*, iar cea simetrică *two-tailed*.

Testul T - Inferență asupra mediei unei populații (σ necunoscută)

- Alegem un nivel de semnificație $\alpha \in \{1\%, 5\%\}$.
- Calculăm *scorul t* (*statistica* testului)

$$t = \frac{\bar{x}_n - \mu_0}{s/\sqrt{n}}$$

- Determinăm valoarea critică corespunzătoare lui α :

$t^* = qt(\alpha, n - 1)$ pentru H_a asimetrică la stânga ($t^* < 0$),

$t^* = qt(1 - \alpha, n - 1)$ pentru H_a asimetrică la dreapta ($t^* > 0$),

$t^* = -qt(\alpha/2, n - 1) = qt(1 - \alpha/2, n - 1)$ pt. H_a

simetrică ($t^* > 0$).

Testul T - Inferență asupra mediei unei populații (σ necunoscută)

6. Comparăm valoarea critică cu scorul t ; dacă scorul t aparține *zonei de respingere*, atunci acceptăm H_a și respingem H_0 . Zonele de respingere sunt:

$(-\infty, t^*]$ pentru H_a asimetrică la stânga,

$[t^*, +\infty)$ pentru H_a asimetrică la dreapta,

$(-\infty, -|t^*|] \cup [|t^*|, +\infty)$ pentru H_a simetrică.

Dacă scorul t nu aparține zonei de respingere vom spune că *nu există suficiente dovezi cu nivelul de semnificație α* pentru a respinge ipoteza nulă (*încercarea de a respinge H_0 eșuează*).

Testul T - Inferență asupra mediei unei populații - Exemplu

Exemplu

- Concentrația de CO (monoxid de carbon) se măsoară cu un aparat numit spectrofotometru care are o precizie de aproape 100 ppm. Aceste aparate trebuie calibrate zilnic măsurând concentrația de CO din eșantioane de gaz industrial care au o concentrație controlată de 70 ppm. Dacă aparatul dă valori "aproprate" de 70 ppm poate fi folosit, dacă nu, trebuie ajustat.
- Presupunem că această concentrație urmează o distribuție normală dar deviația standard este necunoscută. Într-o anumită zi se obțin următoarele valori
58 71 67 64 62.
- Patru dintre aceste valori sunt mai mici decât 70; putem explica aceasta doar pe seama întâmplării? Sau aceasta arată că aparatul trebuie ajustat?

Testul T - Inferență asupra mediei unei populații - Exemplu

Solution

- Este posibil ca aparatul să necesite o ajustare, deci vom testa ipoteza că media este diferită de $\mu_0 = 70$.
- Cum populația urmează o distribuție normală, iar deviația standard a populației este necunoscută putem întreprinde un test T asupra mediei.
- Informațiile privind populația și eșantionul: $\mu_0 = 70$, $s = 4.9295$, $n = 5$, $\bar{x}_n = 64.4$.

1-2. Putem formula ipoteza nulă și o ipoteză alternativă simetrică

$$H_0 : \mu = 70 \quad H_a : \mu \neq 70.$$

Testul T - Inferență asupra mediei unei populații - Exemplu

3. $\alpha = 0.05$.

4. Scorul t

$$t = \frac{\bar{x}_n - \mu_0}{s/\sqrt{n}} = \frac{64.4 - 70}{4.9295/\sqrt{5}} = -2.5402.$$

5. Valoarea critică este $t^* = -qt(\alpha/2, 4) = 2.7764$, for $\alpha = 5\%$.

6. Cum $|t| < |t^*|$, încercarea de a respinge ipoteza nulă eșuează (nu există suficiente dovezi pentru nivelul de 5% pentru a susține că adevărata medie a populației este diferită de 70 ppm).

Testul T - Inferență asupra mediei unei populații - Exemplu

- Reluăm ultimii doi pași pentru celălalt nivel de semnificație:
- 5'. Pentru $\alpha = 1\%$ valoarea critică este $t^* = -qt(\alpha/2, 4) = 4.6040$.
 - 6'. Deoarece $|t| < |t^*|$, încercarea de a respinge ipoteza nulă eșuează (nu există suficiente dovezi pentru nivelul de 1% pentru a susține că adevărata medie a populației este diferită de 70 ppm).
- Merită observat că reluarea ultimilor doi pași cu un α mai mic nu era necesară, deoarece, știm deja, ipoteza nulă nu a putut fi respinsă cu 5% nivel de semnificație ($|t^*|$ crește dacă α scade).

Testul T - Inferență asupra mediei unei populații - Exemplu revăzut

- Privind din nou la datele din eșantion putem observa că media de selecție, \bar{x}_n , este mai mică decât media presupusă a populației.
- Într-o astfel de situație putem formula o ipoteză alternativă asimetrică la stânga.

1-2. Noile ipoteze sunt

$$H_0 : \mu = 70 \quad H_a : \mu < 70.$$

3. $\alpha = 0.05$.

4. Scorul t

$$t = \frac{\bar{x}_n - \mu_0}{s/\sqrt{n}} = \frac{64.4 - 70}{4.9295/\sqrt{5}} = -2.5402.$$

Testul T - Inferență asupra mediei unei populații - Exemplu revăzut

5. Valoarea critică este $t^* = qt(\alpha, 4) = -2.1318$, pentru $\alpha = 5\%$.
6. Deoarece $t < t^*$, putem respinge ipoteza nulă și să acceptăm că media adevărată a populației este mai mică decât 70 ppm.
- Cu celălalt nivel de semnificație (1%):
- 5'. Valoarea critică este $t^* = qt(\alpha, 4) = -3.7469$.
- 6'. Deoarece $t > t^*$, nu putem respinge ipotez nulă cu 1% nivel de semnificație (nu există dovezi suficiente cu 1% nivel de semnificație pentru a susține că adevărata media a populației este mai mică decât 70 ppm).

Testul T - Exerciții

- I. O asociație studentescă susține că un student călătorește în fiecare zi, în medie, 25 de minute pe drumul către universitate. Universitatea determină un eșantion aleator obținut de la 32 de studenți. Eșantionul are o medie de selecție de 19.4 minute și o deviație standard de 9.6 minute. Datele acestea sunt suficiente statistic pentru a respinge afirmațiile asociației? Folosiți $\alpha = 0.01$. (Presupunem că timpul unei călătorii urmează o distribuție normală.)
- II. Se știe că tinerii adulți cheltuie săptămânal 40\$ pentru mâncare de tip fast food. Un studiu bazat pe un eșantion aleator format din 1000 de tineri adulți (Greenfield Online - USA Today Snapshot) determină o medie săptămânală de 35\$ cheltuiți pe fast food cu o deviație standard de 14.50\$. Presupunând ca aceste cheltuieli urmează o distribuție normală întreprindeți un test statistic potrivit asupra mediei acestor cheltuieli pentru întreaga populație.

Testul T - Exerciții

- III. Locuințele dintr-un oraș au o valoare medie de 88950\$. Se presupune că locuințele din apropierea universității au un preț mediu mai mare. Pentru a testa aceasta, se folosește un eșantion aleator simplu format din 12 case alese în apropierea universității. Media lor de selecție este 92460\$, cu o deviație standard de 5200\$. Întreprindeți un test statistic pe baza acestor date cu $\alpha = 5\%$. (Se presupune că prețurile caselor sunt normal distribuite.)

Inferențe asupra a două populații

- În această secțiune vom discuta o procedură prin care se fac inferențe asupra a două populații.
- Atunci când se compară două populații avem nevoie de două eșantioane, câte unul din fiecare populație.
- Pot fi utilizate două tipuri de eșantioane: independente sau dependente. Dependența sau independența a două eșantioane este determinată de sursele datelor.
- O sursă poate fi o persoană, un obiect sau orice altceva care poate da naștere la date. Dacă același set de surse sau surse înrudite sunt folosite pentru a obține datele pentru amândouă populațiile, atunci avem de-a face cu eșantioane dependente.
- Dacă sunt folosite surse care nu au legătură între ele vom obține eșantioane independente. Un exemplu poate clarifica aceste idei.
- Noi vom utiliza populații/eșantioane independente.

Inferențe asupra a două populații

- Se concepe un test pentru compararea a două noi tipuri de anvelope auto.
- Automobilele selectate vor fi echipate cu cele două tipuri de anvelope și apoi conduse în condiții "normale" timp de o lună. Apoi se vor face măsurători pentru a determina comportamentul lor. Au fost propuse două planuri:
 - Plan I: Un eșantion format din mașini alese aleator vor fi echipate cu tipul A de anvelope, apoi vor fi conduse timp de o lună. Un alt eșantion aleator de mașini va fi selectat și echipat cu anvelopele B, apoi vor fi conduse pentru o lună întregă.
 - Plan II: Fiecare mașină dintr-un eșantion aleator va avea o anvelopă de tip A și o anvelopă de tip B (celelalte două anvelope nu participă la test) și apoi vor fi conduse pentru o lună.
- Planul I oferă date independente (sursele sunt neînrudite), iar planul II dă eșantioane dependente (sursele sunt comune).

Testul Z - Inferențe asupra mediilor a două populații (σ_1^2, σ_2^2 cunoscute)

- Considerăm două populații statistice ale căror dispersii (σ_1^2 și σ_2^2) sunt cunoscute.
- Populațiile sunt normal distribuite și dorim să testăm o ipoteză asupra diferenței mediilor.
- Dorim să știm, de exemplu, dacă una dintre medii este mai mică decât cealaltă sau dacă sunt diferite.
- Alegem două eșantioane aleatoare simple independente cu mediile de selecție \bar{x}_{n_1} și \bar{x}_{n_2} . Considerăm (în condițiile ipotezei nule) că mediile celor două populații sunt μ_1 și μ_2 , respectiv.
- Următoarea statistică este distribuită normal standard

$$z = \frac{(\bar{x}_{n_1} - \bar{x}_{n_2}) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$$

Testul Z - Inferențe asupra mediilor a două populații (σ_1^2, σ_2^2 cunoscute)

- Putem utiliza testul Z chiar dacă cele două populații sunt doar aproximativ normal distribuite, dacă cele două eșantioane sunt suficient de mari ($n_1, n_2 \geq 30$).
- Testul se desfășoară astfel:
 1. Formulăm *ipoteza nulă*, care susține că diferența mediilor celor două populații ia o valoare fixată:

$$H_0 : \mu_1 - \mu_2 = m_0$$
 2. Formulăm *ipoteza alternativă* conform informațiilor obținute din eșantioane.

Testul Z - Inferențe asupra mediilor a două populații (σ_1^2, σ_2^2 cunoscute)

Putem avea trei tipuri de ipoteză alternativă

$$H_a : \mu_1 - \mu_2 < m_0 \quad (\text{asimetrică la stânga}) \text{ sau}$$

$$H_a : \mu_1 - \mu_2 > m_0 \quad (\text{asimetrică la dreapta}) \text{ sau}$$

$$H_a : \mu_1 - \mu_2 \neq m_0 \quad (\text{simetrică}).$$

Ipotezele asimetrice se mai numesc *one-tailed*, iar cea simetrică *two-tailed*.

3. Alegem un nivel de semnificație $\alpha \in \{1\%, 5\%\}$.

Testul Z - Inferențe asupra mediilor a două populații (σ_1^2, σ_2^2 cunoscute)4. Calculăm *scorul z* (*statistica testului*)

$$z = \frac{(\bar{x}_{n_1} - \bar{x}_{n_2}) - m_0}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$$

5. Determinăm valoarea critică corespunzătoare lui α :

$z^* = qnorm(\alpha)$ pentru H_a asimetrică la stânga ($z^* < 0$),

$z^* = qnorm(1 - \alpha)$ pentru H_a asimetrică la dreapta ($z^* > 0$),

$z^* = -qnorm(\alpha/2) = qnorm(1 - \alpha/2)$ pt. H_a

simetrică ($z^* > 0$).

Testul Z - Inferențe asupra mediilor a două populații (σ_1^2, σ_2^2 cunoscute)

6. Comparăm valoarea critică cu scorul z ; dacă scorul z aparține *zonei de respingere*, atunci acceptăm H_a și respingem H_0 . Zonele de respingere sunt:

$(-\infty, z^*]$ pentru H_a asimetrică la stânga,

$[z^*, +\infty)$ pentru H_a asimetrică la dreapta,

$(-\infty, -|z^*|] \cup [|z^*|, +\infty)$ pentru H_a simetrică.

Dacă scorul z nu aparține zonei de respingere spunem că *nu există suficiente dovezi cu nivelul de semnificație α* pentru a respinge ipoteza nulă (*încercarea de a respinge H_0 eșuează*).

Testul Z - Inferențe asupra mediilor a două populații (σ_1^2, σ_2^2 cunoscute)*Observații*

- Atunci când întreprindem un test asupra mediilor a două populații, cel mai adesea vom presupune, în ipoteza nulă, că cele două medii sunt egale (i. e., $\mu_1 - \mu_2 = 0$, sau $m_0 = 0$).
- Sintagma "să se testeze mediile" are următorul înțeles: testăm $H_0 : \mu_1 - \mu_2 = 0$ versus $H_a : \mu_1 \neq \mu_2$.
- O altă observație este aceea că pașii 3, 5 și 6 ai testului curent sunt identici cu cei ai testului Z asupra mediei unei populații.

Testul Z - Inferențe asupra mediilor a două populații - Exemplu

Exemplu.

- Un studiu arată că studenții din primul an lucrează în fiecare săptămână având o deviație standard de 8.7 ore (cei din universitățile publice) și cu o deviație standard de 8.9 (cei din universitățile private). Folosind eşantioane aleatoare independente (unul din universitățile publice de dimensiune 900 și unul din universitățile private de dimensiune 1000) se determină mediile de selecție 16.1 și 15.2 de ore pe săptămână, respectiv.
- Această diferență între medii este datorată șanseii? Dacă nu, ce altă explicație ar putea avea? Folosiți 5% și 1% nivel de semnificație.

Soluție.

- Este posibil ca cele două medii ale populațiilor să fie diferite.
- Nu știm dacă cele două populații urmează distribuții normale, dar eşantioanele sunt suficient de mari pentru a folosi un test Z .

Testul Z - Inferențe asupra mediilor a două populații - Exemplant

- Datele privind cele două populații/șanțioane sunt: $m_0 = 0$, $\sigma_1 = 8.7$, $n_1 = 1000$, $\bar{x}_{n_1} = 16.1$, $\sigma_2 = 8.9$, $n_2 = 900$, and $\bar{x}_{n_2} = 15.2$.

1-2. Formulăm ipoteza nulă și o ipoteză alternativă simetrică

$$H_0 : \mu_1 - \mu_2 = 0 \quad H_a : \mu_1 - \mu_2 \neq 0.$$

3. $\alpha = 0.05$.

4. Scorul z

$$z = \frac{(\bar{x}_{n_1} - \bar{x}_{n_2}) - m_0}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} = 2.2244.$$

5. Valoarea critică este $z^* = -qnorm(\alpha/2) = 1.9599$, pentru $\alpha = 5\%$.
6. Deoarece $|z| > |z^*|$, putem respinge ipoteza nulă, și să acceptăm că mediile celor două populații diferă: diferența dintre mediile șanțioanelor nu se datorează hazardului.

Testul Z - Inferențe asupra mediilor a două populații - Exemplu

- Pentru celălalt nivel de semnificație:
- 5'. Cu $\alpha = 1\%$ valoarea critică este $z^* = -qnorm(\alpha/2) = 2.5758$.
 - 6'. Cum $|z| < |z^*|$, încercarea de a respinge ipoteza nulă eșuează cu 1% nivel de semnificație (nu există suficiente dovezi pentru nivelul de 1% pentru a susține că mediile celor două populații diferă).

Testul Z - Inferențe asupra mediilor a două populații - Exemplu revăzut

- Privind din nou informațiile din eșantion putem observa că media de selecție a studenților din universitățile publice este mai mare decât aceea a celor din universitățile private.
- Am putea formula o ipoteză alternativă asimetrică la dreapta

1-2. Noile ipoteze sunt

$$H_0 : \mu_1 - \mu_2 = 0 \quad H_a : \mu_1 - \mu_2 > 0.$$

3. $\alpha = 0.05$.

4. Scorul z

$$z = \frac{(\bar{x}_{n_1} - \bar{x}_{n_2}) - m_0}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} = 2.2244.$$

Testul Z - Inferențe asupra mediilor a două populații - Exemplant revăzut

5. Valoarea critică: $z^* = qnorm(1 - \alpha) = 1.6448$, pentru $\alpha = 5\%$.
6. Deoarece $z > z^*$, putem respinge ipoteza nulă, și să acceptăm că media primei populații este mai mare decât a celei de-a doua: în medie un student la o instituție publică muncește mai mult decât unul de la o instituție privată.
- Pentru 1% nivel de semnificație:
- 5'. Valoarea critică este $z^* = qnorm(1 - \alpha) = 2.3263$.
- 6'. Cum $z < z^*$, nu putem respinge ipoteza nulă cu 1% nivel de semnificație (nu există dovezi suficiente, cu 1% nivel de semnificație, pentru a susține că prima medie este mai mare decât cea de-a doua).

Testul Z - Exerciții

- I. Întreprindeți din nou testul Z anterior modificând $n_1 = 1000$.
- II. Se știe că un colegiu privat are costuri mai mari decât unul public. Este această diferență valabilă și pentru costurile manualelor universitare? Aceste costuri per curs urmează legi normale cu deviația standard de 18.55\$ (pentru colegiile publice) and 13.12\$ (pentru colegiile private). Se aleg două eșantioane aleatoare; folosind $\alpha = 5\%$ să se determine dacă costurile medii per curs ale manualelor școlare diferă pentru cele două tipuri de colegii.

Public :

64.69 89.6 101.49 101.75 103.59 106.38 106.77 110.69 118.94 135.94

Privat :

71.00 96.19 97.14 96.47 98.56 98.94 107.79 112.58 114.00 116.55

Inferențe asupra raportului dintre dispersii

- Când se compară două populații, în mod natural vom pune față în față parametrii fundamentali ai distribuției, "centrele" și "împrăștierea", adică mediile și deviațiile standard.
- Am descris deja o procedură pentru compararea mediilor a două populații folosind eșantioane independente, când se știu dispersiile.
- Există și o altă procedură pentru cazul când dispersiile nu se cunosc. Dar pentru acest caz trebuie mai întâi știut dacă dispersiile sunt egale.
- Următorul pas (logic) va fi compararea deviațiilor standard.

Inferențe asupra raportului dintre dispersii

- Procedura de inferență prezentată aici va fi un test de semnificație pentru deviațiile standard (sau dispersiile) a două populații normale.
- Pentru acest test prezumția de normalitate este foarte importantă.
- Alegem două eșantioane aleatoare independente (de dimensiuni n_1 și n_2 , respectiv) cu deviațiile standard s_1 și s_2 .
- Considerăm că, în condițiile ipotezei nule, adevăratele deviații standard σ_1 și σ_2 sunt egale.
- Următoarea statistică este distribuită Fisher

$$F = \frac{s_1^2}{s_2^2}.$$

Distribuția Fisher, $F(r_1, r_2)$

- Există o familie de distribuții Fisher. Fiecare distribuție F se identifică prin două numere de grade de libertate (câte unul pentru fiecare eșantion).
- Proprietăți ale distribuției F :
 - F are valori nenegative;
 - F este asimetrică;
- Pentru inferențele din această secțiune numerele de grade de libertate sunt $r_1 = n_1 - 1$, $r_2 = n_2 - 1$.

Testul F' - Inferențe asupra raportului dintre dispersii

- Testul se desfășoară astfel:

1. Formulăm *ipoteza nulă*:

$$H_0 : \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} = 1$$

2. Formulăm *ipoteza alternativă* conform informațiilor obținute din eșantion. Putem avea două¹ tipuri de ipoteză alternativă

$$H_a : \frac{\sigma_1}{\sigma_2} > 1$$

(*asimetrică la dreapta*) pentru un *un test one-tailed*

$$H_a : \frac{\sigma_1}{\sigma_2} \neq 1$$

(*simetrică*) pentru un *un test two-tailed*.

¹ Este recomandat ca dispersia mai mare sau care e de așteptat să fie mai mare să fie pusă la numărător.

Testul F - Inferențe asupra raportului dintre dispersii

- Alegem nivelul de semnificație $\alpha \in \{1\%, 5\%\}$.
- Calculăm *scorul* F (*statistica* testului)

$$F = \frac{s_1^2}{s_2^2}$$

- Determinăm valoarea critică corespunzătoare pentru α

$F^* = qf(1 - \alpha, n_1 - 1, n_2 - 1)$ pentru H_a asimetrică la dreapta ,

$$F_s^* = qf(\alpha/2, n_1 - 1, n_2 - 1), F_d^* = qf(1 - \alpha/2, n_1 - 1, n_2 - 1)$$

pentru H_a simetrică.

Testul F - Inferențe asupra a două dispersii

6. Comparăm valoarea critică cu scorul F ; dacă scorul F aparține *zonei de respingere*, atunci acceptăm H_a și respingem H_0 . Zonele de respingere sunt:

$[F^*, +\infty)$ pentru H_a asimetrică la dreapta,

$(0, F_s^*] \cup [F_d^*, +\infty)$ pentru H_a simetrică.

Dacă scorul F nu aparține zonei de respingere spunem că *nu există suficiente dovezi cu nivelul de semnificație α* pentru a respinge ipoteza nulă (*încercarea de a respinge H_0 eșuează*).

Testul F - Inferență asupra raportului dintre dispersii - Exemplant

Exemplant.

- O companie care îmbuteliază băuturi răcoritoare deține o mașină care umple sticle de 16 uncii. Compania trebuie să controleze deviația standard σ (sau dispersia σ^2) cantității de băutură din sticle. O medie corectă a cantității de băutură nu garantează faptul ca mașina este bine calibrată. Dacă dispersia este prea mare multe sticle vor avea prea multă sau prea puțină băutură.
- Astfel, mașina trebuie să aibă o deviație standard (sau dispersie) cât mai mică posibil.
- Compania dorește să decidă dacă să instaleze o mașină de îmbuteliat mai modernă și mai rapidă.
- Una dintre îngrijorări este aceea că o viteză mai mare de îmbuteliere corespunde unei dispersii mai mari, iar o asemenea creștere nu este acceptabilă.

Testul F' - Inferențe asupra raportului dintre dispersii - Exemplan

- Producătorul noii mașini de îmbuteliat susține că dispersia nu este mai mare decât cea a vechii mașini.
- Un eșantion de 25 de sticle îmbuteliate de mașina nouă are o dispersie de 0.0018, în timp ce un eșantion de 22 sticle îmbuteliate de mașina curentă are o dispersie de 0.0008.

Soluție.

- Vom testa amândouă tipurile de ipoteză alternativă: mai întâi faptul că dispersiile celor două mașini sunt diferite, iar apoi că noua mașină are o dispersie mai mare.
- Datele relativ la cele două populații/eșantioane: $n_1 = 25$, $s_1^2 = 0.0018$, $n_2 = 22$ și $s_2^2 = 0.0008$.

Testul F - Inferențe asupra raportului dintre dispersii - Exemplu

- 1-2. Formulăm ipoteza nulă și o ipoteză alternativă simetrică

$$H_0 : \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} = 1 \quad \text{și} \quad H_a : \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \neq 1.$$

3. Alegem $\alpha = 5\%$.

4. Calculăm scorul F al testului

$$F = \frac{s_1^2}{s_2^2} = 2.2500$$

5. Valorile critice sunt $F_s^* = qf(\alpha/2, n_1 - 1, n_2 - 1) = 0.4327$, $F_d^* = qf(1 - \alpha/2, n_1 - 1, n_2 - 1) = 2.3675$, pentru $\alpha = 5\%$.

Testul F - Inferențe asupra raportului dintre dispersii - Exemplu

6. Deoarece $F \in [F_s^*, F_d^*]$, încercarea de a respinge ipoteza nulă eșuează cu 5% nivel de semnificație (nu există suficiente dovezi pentru nivelul de 5% pentru a susține că dispersiile celor două mașini sunt diferite): diferențele sunt datorate hazardului.
- Reluăm ultimii doi pași pentru celălalt nivel de semnificație:
- 5'. Pentru $\alpha = 1\%$ valorile critice vor da un interval mai mare: $F_s^* = qf(\alpha/2, n_1 - 1, n_2 - 1) = 0.3294$, $F_d^* = qf(1 - \alpha/2, n_1 - 1, n_2 - 1) = 3.1473$.
- 6'. Concluzia este aceeași: nu putem respinge ipoteza nulă.
- La fel ca și în cazul testelor Z și T , dacă H_0 nu se respinge pentru $\alpha = 5\%$ nu se va respinge nici pentru $\alpha = 1\%$ (pentru că zona de respingere în al doilea caz o înglobează pe prima).

Testul F - Inferențe asupra raportului dintre dispersii - Exemplu revizuit

- Deoarece dispersia primului eșantion este mai mare decât cea de-a doua vom întreprinde un al doilea test cu o ipoteză alternativă asimetrică la dreapta.

1-2. Noile ipoteze sunt

$$H_0 : \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} = 1 \quad \text{și} \quad H_a : \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} > 1.$$

3. Alegem $\alpha = 5\%$.

4. Scorul testului va fi același

$$F = \frac{s_1^2}{s_2^2} = 2.2500$$

5. Valoarea critică este $F^* = qf(1 - \alpha, n_1 - 1, n_2 - 1) = 2.0540$, pentru $\alpha = 5\%$.

Testul F - Inferențe asupra raportului dintre dispersii - Exemplu revizuit

6. Deoarece $F \in [F_d^*, +\infty)$, putem să respingem ipoteza nulă și să acceptăm ipoteza alternativă: dispersia noii mașini este mai mare decât a celei vechi.
- Pentru $\alpha = 1\%$
- 5'. Valoarea critică este $F^* = qf(1 - \alpha, n_1 - 1, n_2 - 1) = 2.8010$.
- 6'. Cum $F < F^*$, încercarea de a respinge ipoteza nulă eșuează cu 1% nivel de semnificație (nu există suficiente dovezi pentru nivelul de 1% pentru a susține că mașina nouă are o dispersie mai mare).

Testul T - inferențe asupra mediilor a două populații (σ_1^2, σ_2^2 necunoscute)

- Considerăm două populații statistice ale căror dispersii (σ_1^2 și σ_2^2) sunt necunoscute.
- Populațiile sunt normal distribuite și dorim să testăm o ipoteză asupra diferenței mediilor.
- Dorim să știm, de exemplu, dacă una dintre medii este mai mare decât cealaltă sau dacă sunt diferite.
- Alegem două eșantioane aleatoare simple independente cu mediile de selecție \bar{x}_{n_1} și \bar{x}_{n_2} și deviațiile standard s_1 și s_2 , respectiv.
- Considerăm (în condițiile ipotezei nule) că mediile celor două populații sunt μ_1 și μ_2 , respectiv.
- Expresia scorului testului depinde de faptul dacă cele două dispersii sunt egale sau diferite. Astfel, înainte de a întreprinde testul T vom desfășura un test F relativ la raportul celor două dispersii.

Testul T - inferențe asupra mediilor a două populații (σ_1^2, σ_2^2 necunoscute)

- Atunci când cele două dispersii sunt egale următoarea statistică este repartizată Student cu $(n_1 + n_2 - 2)$ grade de libertate

$$t = \frac{(\bar{x}_{n_1} - \bar{x}_{n_2}) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{s^2}{n_1} + \frac{s^2}{n_2}}}$$

$$\text{unde } s = \sqrt{\frac{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2}{n_1 + n_2 - 2}}$$

- Dacă cele două dispersii sunt diferite următoarea statistică este repartizată Student cu $\min(n_1 - 1, n_2 - 1)$ grade de libertate

$$t = \frac{(\bar{x}_{n_1} - \bar{x}_{n_2}) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}}$$

Testul T - inferențe asupra mediilor a două populații (σ_1^2, σ_2^2 necunoscute)

Testul decurge astfel:

1. Formulăm *ipoteza nulă*, care susține că diferența mediilor celor două populații ia o anumită valoare:

$$H_0 : \mu_1 - \mu_2 = m_0$$

2. Formulăm *ipoteza alternativă* conform datelor din eşantioane. Putem avea trei tipuri de ipoteză alternativă

$$H_a : \mu_1 - \mu_2 < m_0 \quad (\text{asimetrică la stânga}) \text{ sau}$$

$$H_a : \mu_1 - \mu_2 > m_0 \quad (\text{asimetrică la dreapta}) \text{ sau}$$

$$H_a : \mu_1 - \mu_2 \neq m_0 \quad (\text{simetrică}).$$

Ipotezele asimetrice se mai numesc *one-tailed*, iar cea simetrică *two-tailed*.

3. Alegem nivelul de semnificație $\alpha \in \{1\%, 5\%\}$.

Testul T - inferențe asupra mediilor a două populații (σ_1^2, σ_2^2 necunoscute)

4. Calculăm *scorul t* (statistica testului)

a) dacă dispersiile sunt egale:

$$t = \frac{(\bar{x}_{n_1} - \bar{x}_{n_2}) - m_0}{\sqrt{\frac{s^2}{n_1} + \frac{s^2}{n_2}}}$$

unde $s^2 = \frac{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2}{n_1 + n_2 - 2}$, iar numărul de grade de libertate este $df = n_1 + n_2 - 2$.

b) dacă dispersiile sunt diferite:

$$t = \frac{(\bar{x}_{n_1} - \bar{x}_{n_2}) - m_0}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}}$$

numărul de grade de libertate fiind $df = \min(n_1 - 1, n_2 - 1)$.

Testul T - inferențe asupra mediilor a două populații (σ_1^2, σ_2^2 necunoscute)

5. Determinăm valoarea critică corespunzătoare

$$t^* = qt(\alpha, df) \text{ pentru } H_a \text{ asimetrică la stânga } (t^* < 0),$$

$$t^* = qt(1 - \alpha, df) \text{ pentru } H_a \text{ asimetrică la dreapta } (t^* > 0),$$

$$t^* = -qt(\alpha/2, df) = qt(1 - \alpha/2, df) \text{ pt. } H_a \text{ simetrică } (t^* > 0).$$

6. Comparăm valoarea critică cu scorul z ; dacă scorul z aparține *zonei de respingere*, atunci acceptăm H_a și respingem H_0 . Zonele de respingere sunt:

$$(-\infty, t^*] \text{ pentru } H_a \text{ asimetrică la stânga,}$$

$$[t^*, +\infty) \text{ pentru } H_a \text{ asimetrică la dreapta,}$$

$$(-\infty, -|t^*|] \cup [|t^*|, +\infty) \text{ pentru } H_a \text{ simetrică.}$$

Testul T - inferențe asupra mediilor a două populații - Exemplu

Dacă scorul t nu aparține zonei de respingere spunem că *nu există suficiente dovezi cu nivelul de semnificație α pentru a respinge ipoteza nulă (încercarea de a respinge H_0 eșuează)*.

Exemplu.

- National Assessment of Educational Progress (NAEP) monitorizează tendințele performanței școlare. În fiecare an NAEP desfășoară la nivel național teste asupra mai multor subiecte pe eșantioane de elevi care au 17 ani. Se știe că rezultatele acestor teste sunt normal distribuite.
- Testul de lectură a fost dat în 1990 și din nou în 2004. Pentru două eșantioane de 1000 de elevi scorul mediu a scăzut de la 290 la 285, deviațiile standard ale eșantioanelor fiind 40 și 37, respectiv.
- Diferența este de 5 puncte; este aceasta datorată hazardului sau este o diferență reală? ($\alpha = 1\%$)

Testul T - inferențe asupra mediilor a două populații - Exemplu*Soluție.*

- Deoarece populații sunt distribuite normal, iar deviațiile standard ale populațiilor nu sunt cunoscute vom întreprinde un test T pentru cele două medii.
- *Mai întâi întreprindem testul F asupra raportului celor două dispersii.*
- Informațiile legate de eșantioane sunt $s_1 = 40$, $n_1 = 1000$, $\bar{x}_{n_1} = 290$, $s_2 = 37$, $n_2 = 1000$, $\bar{x}_{n_2} = 285$.

$$1-2. H_0: \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} = 1 \quad H_a: \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \neq 1.$$

Testul T - inferențe asupra mediilor a două populații - Exemplu

3. Alegem $\alpha = 1\%$.

4. Calculăm scorul F al testului

$$F = \frac{s_1^2}{s_2^2} = 1.0810$$

5. Valorile critice sunt $F_s^* = qf(\alpha/2, n_1 - 1, n_2 - 1) = 0.8494$, $F_d^* = qf(1 - \alpha/2, n_1 - 1, n_2 - 1) = 1.1771$, pentru $\alpha = 1\%$.

6. Deoarece $F \in [F_s^*, F_d^*]$, încercarea de a respinge ipoteza nulă eșuează cu 1% nivel de semnificație (nu există suficiente dovezi pentru nivelul de 1% pentru a susține că cele două dispersii sunt diferite); diferența dintre dispersiile celor două eșantioane este datorată întâmplării.

- *În cele ce urmează vom presupune că cele două dispersii sunt egale.*

Testul T - inferențe asupra mediilor a două populații - Exemplu

- Întreprindem acum testul T pentru diferența mediilor.

1-2. $H_0: \mu_1 - \mu_2 = 0 \quad H_a: \mu_1 - \mu_2 \neq 0.$

3. $\alpha = 1\%,$

4. Calculăm scorul t al testului

$$t = \frac{(\bar{x}_{n_1} - \bar{x}_{n_2})}{\sqrt{\frac{s^2}{n_1} + \frac{s^2}{n_2}}} = 2.9003,$$

unde $s = \sqrt{\frac{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2}{n_1 + n_2 - 2}} = 38.5292.$

Testul T - inferențe asupra mediilor a două populații - Exemplu

5. Valoarea critică: $t^* = -qt(\alpha/2, df) = 2.5782$, unde $df = n_1 + n_2 - 2 = 1998$ ($\alpha = 1\%$).

6. Deoarece $|t| > |t^*|$, putem respinge ipoteza nulă, și să acceptăm că cele două medii sunt diferite: între 1990 și 2004 rezultatul mediu al testului de lectură s-a schimbat.

- Întreprindem acum un test cu ipoteză alternativă asimetrică la dreapta

$$1-2'. H_0 : \mu_1 - \mu_2 = 0 \quad H_a : \mu_1 - \mu_2 > 0.$$

5'. Valoarea critică este $t^* = qt(1 - \alpha, df) = 2.3282$, unde $df = n_1 + n_2 - 2 = 1998$.

6'. Cum $t > t^*$, putem respinge ipoteza nulă, și să acceptăm că prima medie (din 1990) este mai mare decât cea de-a doua (din 2004): rezultatul mediu a scăzut.

- (Exercițiu) A fost necesar acest al doilea test T ?

Testul T - inferențe asupra mediilor a două populații - Exerciții

- I. Femeile au în medie cu 8 perechi de pantofi mai mult decât bărbații (conform unui Snapshot USA Today). Un studiu recent efectuat la un colegiu a determinat următoarele valori

	n	media	dev. std.
Bărbați	21	8.48	4.43
Femei	30	26.63	21.83





Diferența dintre cele două eșantioane este mai mare decât 8, testați această ipoteză cu $\alpha = 5\%$. (Populațiile sunt normale.)

- II. Se consideră de mult timp că chiria medie a unei mașini în New York este egală cu aceea din Boston. Un studiu din 2007 însă a dat următoarele valori:

	n	media	dev. std.
Boston	10	95.94	7.50
New York	16	127.75	15.83

Este această diferență semnificativă sau este datorată șansei? (1%, 5%)

Bibliography

-  Freedman, D., R. Pisani, R. Purves, *Statistics*, W. W. Norton & Company, 4th edition, 2007.
-  Johnson, R., P. Kuby, *Elementary Statistics*, Brooks/Cole, Cengage Learning, 11th edition, 2012.
-  Shao, J., *Mathematical Statistics*, Springer Verlag, 1998.
-  Spiegel, M. R., L. J. Stephens, *Theory and Problems of Statistics*, Schaum's Outline Series, McGraw Hill, 3rd edition, 1999.