Probabilităţi şi statistică - Cursul 1

26 februarie, 2024

- Primele şase săptămâni: Teoria (discretă a) probabilităţilor, ultimele şapte săptămâni: Statistică.
- Şase seminarii, şapte laboratoare şi treisprezece cursuri;
- Două punctaje intermediare sunte asociate seminarelor şi laboratoarelor: T_1 şi T_2:

Desfăşurarea cursului şi examinarea

- T_1 este suma a şase note: câte un test care se dă la fiecare sfârşit de seminar (10-15 minute). Trebuie obţinute cel puţin 30 de puncte (din cele $6 \times 10 = 60$), aceasta este o condiţie de promovare a disciplinei ($T_1 \geqslant 30$).
- T_2 se compune din 20 de puncte pentru exercitiile rezolvate la laborator plus 40 de puncte pentru temele de laborator (pentru acasa). Trebuie obţinute cel puţin 30 de puncte (din cele $20 + 40 = 60$), aceasta este o condiţie de promovare a disciplinei ($T_2 \geqslant 30$).

Nu există sesiune de restanţe sau măriri!
Punctajele şi notele finale se vor finaliza înainte de începerea sesiunii!

Desfăşurarea cursului şi examinarea

- Formula de calcul a punctajului final

$$T = T_1 + T_2.$$

- Punctajul acesta se transformă în nota finală ulterior, astfel: $T \in [60, 70) \rightarrow$ nota 5, $T \in [70, 80) \rightarrow$ nota 6, $T \in [80, 90) \rightarrow$ nota 7, $T \in [90, 100) \rightarrow$ nota 8, $T \in [100, 110) \rightarrow$ nota 9 şi $T \in [110, 120) \rightarrow$ nota 10.
- Ambele punctajele implicate – T_1 şi T_2 – trebuie să fie peste 30 de puncte.
- Dacă $T_1 < 30$ şi/sau T_2 este < 30, atunci disciplina este nepromovată.

Table of contents

Experiment aleator

- Noţiunea de *experienţă* sau (*experiment*) *aleator* corespunde, intuitiv, unui proces în urma căruia obţinem un rezultat care nu poate fi cunoscut înaintea desfăşurării procesului, dar a cărui mulţime de rezultate posibile este cunoscută.
- Cel care analizează rezultatele unui astfel de experiment este de obicei un observator neutru şi mai rar un participant deşi, uneori, ar putea participa la efectuarea experimentului aleator. Experimentele în majoritate sunt practice dar pot fi şi abstracte.
- Rezultatele unui experiment aleator sunt datorate *şansei*, iar mecanismul prin care ele (rezultatele) se produc interesează mai puţin. Vom considera că, la un moment dat, avem în atenţie un singur experiment, chiar dacă el se poate repeta.

Experiment aleator

Definiţia 1

Se numeşte experiment aleator *un experiment al cărui rezultat nu este cunoscut dinainte, dar ale cărui rezultate posibile sunt cunoscute în totalitate şi care poate fi repetat în condiţii identice.*

- Aruncând un zar, va apărea una dintre feţele $\{1, 2, \ldots, 6\}$, fără a şti cu siguranţă care dintre ele. ♣
- Aruncând două zaruri, va apărea una dintre combinaţiile $\{(1, 1), (1, 2), \ldots, (6, 6)\}$, fără a şti care dintre ele. ♣
- Aruncând două monede, cu siguranţă apare stema (s) şi/sau banul (b) pe amândouă, iar toate rezultatele posibile sunt combinaţiile (s, s), (s, b), (b, s), (b, b). ♣
- Dacă experimentul constă în măsurarea duratei de viaţă a unei baterii, atunci rezultatul va fi un număr real $x \geqslant 0$. ♣

Eveniment aleator

- Analizând un experiment aleator, urmărim rezultatul acestuia; întotdeauna un singur rezultat se va produce, fără a şti care (din mulţimea cunoscută a rezultatelor posibile). Vom spune că se produce un *eveniment elementar*.

Definiţia 2

Un rezultat posibil al unui experiment aleator se numeşte eveniment aleator elementar*, iar mulţimea acestora se numeşte* spaţiul de selecţie *sau* al evenimentelor elementare *- notat cu* Ω.

- După efectuarea unui experiment, doar unul dintre elementele mulţimii Ω se "întâmplă" - şi asta conform şansei pe care o are fiecare rezultat posibil al experimentului.
- Asupra rezultatelor experimentului se pot face raţionamente, judecăţi, iar interesul poate fi atras nu doar de rezultatul în sine cât de tipul rezultatului, de familia din care face el parte.

Eveniment aleator

- Extindem astfel noţiunea de eveniment aleator elementar.

Definiţia 3

Se numeşte eveniment aleator *o anumită submulţime a spaţiului de selecţie:* $A \subseteq \Omega$.

- Aruncând un zar, spaţiul evenimentelor elementare este $\Omega = \{1, 2, \ldots,$ ne-ar putea interesa apariţia unei feţe cu număr par, acesta este evenimentul aleator $A = \{2, 4, 6\} \subseteq \Omega$. ♣
- Aruncând două zaruri, $\Omega = \{(1, 1), (1, 2), \ldots, (6, 6)\}$; dacă interesează ca suma feţelor este 4, acesta este evenimentul aleator $A = \{(1, 3), (2, 2), (3, 1)\} \subseteq \Omega$. ♣
- La aruncarea a două monede, $\Omega = \{(s, s), (s, b), (b, s), (b, b)\}$. Evenimentul aleator "feţele de pe cele două monede sunt diferite" este $A = \{(s, b), (b, s)\}$, iar cel definit prin "pe cel puţin una dintre cele două monede apare stema" este $B = \{(s, s), (s, b), (b, s)\}$. ♣

Eveniment aleator

- Uzual un eveniment aleator este definit prin intermediul unui predicat: evenimentul va fi format din evenimentele elementare (rezultatele experimentului) care satisfac predicatul respectiv.
- Un eveniment aleator este privit, formal, ca o submulţime a mulţimii de evenimente elementare Ω.
- Dacă Ω este o mulţime discretă (adică cel mult numărabilă), atunci orice submulţime $A \subseteq \Omega$ este considerată eveniment aleator.
- Dacă Ω nu este discretă, atunci numai anumite submulţimi pot fi evenimente aleatoare, dar acesta nu este subiectul cursurilor noastre (de probabilităţi discrete).

Evenimente aleatoare - proprietăţi şi notaţii

Definiţia 4

Spunem că un eveniment aleator $A \subseteq \Omega$ se realizează *(*se produce*) dacă, în urma efectuării experimentului aleator, rezultatul (evenimentul aleator elementar) aparţine lui A.*

- Evenimentele aleatoare se notează, de obicei, cu litere mari de la începutul alfabetului: A, B, C etc. Deoarece, în majoritatea aplicaţiilor Ω va fi o mulţime discretă, putem considera că orice submulţime a lui Ω este un eveniment aleator.
- Nu mai facem distincţie între submulţimi din Ω şi evenimente aleatoare proprietăţile şi operaţiile cu mulţimi se transferă asupra evenimentelor aleatoare.

- $\varnothing$ este *evenimentul imposibil* (nu se realizează niciodată);
- Ω este *evenimentul sigur* (sau *total* - se realizează întotdeauna);

Evenimente aleatoare - proprietăţi şi notaţii

- dacă $A, B \subseteq \Omega$ sunt evenimente aleatoare, atunci
  - $A \cup B$ este un eveniment aleator care se realizează atunci şi numai atunci când se realizează măcar unul dintre evenimentele A şi B;
  - $A \cap B$ este un eveniment aleator care se realizează atunci şi numai atunci când se realizează şi A şi B;
  - $A \Delta B$ este un eveniment aleator care se realizează atunci şi numai atunci când se realizează exact unul dintre evenimentele A şi B;
  - $A \setminus B$ este un eveniment aleator care se realizează atunci şi numai atunci când se realizează A dar nu şi B;
- dacă A este eveniment aleator, atunci $\overline{A} = \Omega \setminus A$ este de asemenea eveniment aleator şi este numit *evenimentul contrar* lui A: $\overline{A}$ se realizează ori de câte ori A nu se realizează;
- dacă $A \subseteq B$, atunci se spune ca evenimentul A îl *implică* pe B;

Evenimente aleatoare - proprietăţi şi notaţii

- dacă $A \cap B = \varnothing$ se spune că A şi B sunt *incompatibile* (sau *disjuncte*), dacă $A \cap B \neq \varnothing$, A şi B sunt *compatibile*;
- mai general, dacă $A_i \cap A_j = \varnothing$, pentru orice două evenimente distincte dintr-o familie $(A_i)_{I \in I}$, atunci spunem că această familie este formată din evenimente *mutual incompatibile* (sau *mutual disjuncte*);
- în mod similar se pot defini *reuniunea* sau *intersecţia* unui număr finit (sau infinit numărabil) de evenimente aleatoare.

Exemplu. Să considerăm ca experiment aruncarea a două zaruri. Fie A evenimentul "suma zarurilor este 5" şi $B =$ "cel puţin un zar este mai mare sau egal cu 4":

$$A = \{(1,4),(2,3),(3,2),(4,1)\} \text{ şi}$$

$$B = \{(1,4),(2,4),\ldots,(6,4),(1,5),(2,5),\ldots,(6,5),(1,6),(2,6),\ldots,(6,6),$$
$$(4,1),(4,2),(4,3),(5,1),(5,2),(5,3),(6,1),(6,2),(6,3)\}.$$

Funcţia de probabilitate

Atunci

- $A \cup B = \Omega \setminus \{(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,2),(3,1),(3,3)\}$;
- $A \cap B = \{(1,4),(4,1)\}$ - A şi B sunt compatibile;
- $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B) = \dots$
- $\overline{A} = \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,5),\dots(6,6)\}$. ♣

- Vom presupune că Ω este cel mult numărabilă:

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots\} \text{ (finită sau infinit numărabilă).}$$

- Noţiunea de *probabilitate* pleacă de la ideea asocierii câte unui număr real fiecărui eveniment aleator pentru a le măsura şi compara şansele.
- Definiţia se bazează, printre altele, pe faptul că unui eveniment mai frecvent trebuie sa îi corespundă o probabilitate mai mare.
- Probabilitatea unui eveniment aleator A se va nota cu $P(A)$.

Axiomele funcţiei de probabilitate

- Axiomele care urmează definesc *funcţia de probabilitate*. Pe o aceeaşi mulţime Ω se pot defini diverse funcţii de probabilitate!

Definiţia 5

(Kolmogorov) Dacă Ω este mulţimea evenimentelor aleatoare elementare ale unui experiment aleator, o funcţie de probabilitate *pe Ω este o funcţie P definită pe familia evenimentelor aleatoare (în cazul nostru $\mathcal{P}(\Omega) = 2^{\Omega}$) care satisface*

Axioma 1. $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$, *pentru orice eveniment aleator A.*

Axioma 2. $P(\Omega) = 1$ *şi* $P(\varnothing) = 0$.

Axioma 3. *Dacă $A_1, A_2, \ldots, A_k, \ldots$ sunt evenimente aleatoare mutual incompatibile, atunci*

$$P\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} P(A_k).$$

Axiomele funcţiei de probabilitate

- *Axioma 1* ne spune că probabilitatea asociată unui eveniment aleator este un număr nenegativ şi subunitar.
- *Axioma 2* arată că orice rezultat al experimentului, cu probabilitate 1, se găseşte în mulţimea Ω. În plus, mai spune că evenimentul imposibil nu se produce niciodată.
- *Axioma 3* arată că, pentru orice şir de evenimente aleatoare mutual incompatibile, probabilitatea de a se produce măcar unul dintre aceste evenimente este suma probabilităţilor tuturor evenimentelor.
- În cazul în care şirul este infinit (înţelegând prin aceasta că $P(A_k) > 0$, pentru o infinitate de indici k), *axioma 3* garantează şi convergenţa seriei din membrul drept.

Proprietăţi ale funcţiei de probabilitate

Propoziţia 1

Fie $A_1, A_2, \ldots, A_m$ *evenimente aleatoare mutual incompatibile, atunci* $P\left(\bigcup_{k=1}^{m} A_k\right) = \sum_{k=1}^{m} P(A_k)$.

Demonstraţie: Considerăm în axioma 3, $A_k = \varnothing, \forall\, k \geqslant m+1$. ■

Propoziţia 2

Fie A *şi* B *evenimente aleatoare, atunci*

(i) $P(A) = P(A \cap B) + P(A \setminus B)$;

(ii) $P(A \cup B) = P(A) - P(A \cap B) + P(B)$;

(iii) $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$;

(iv) *dacă* A *implică* B $(A \subseteq B)$, *atunci* $P(A) \leqslant P(B)$.

Proprietăţi ale funcţiei de probabilitate

Demonstraţie: (i): în Propoziţia 1 luăm $m = 2$, $A_1 = A \cap B$, $A_2 = A \setminus B$.. (ii): se foloseşte (i) şi Propoziţia 1. (iii): utilizăm Propoziţia 1 şi Axioma 2: $1 = P(\Omega) = P(A) + P(\overline{A})$. (iv): conform (i) şi Axiomei 1 avem $P(B) = P(B \cap A) + P(B \setminus A) = P(A) + P(B \setminus A) \geqslant P(A)$. ■

Propoziţia 3

(Principiul includerii şi al excluderii) Dacă $A_1, A_2, \ldots, A_m$ sunt evenimente aleatoare, atunci

$$P\left(\bigcup_{k=1}^{m} A_k\right) = \sum_{k=1}^{m} P(A_k) - \sum_{1 \leqslant k_1 < k_2 \leqslant m} P(A_{k_1} \cap A_{k_2}) + \cdots +$$

$$+(-1)^{p+1} \sum_{1 \leqslant k_1 < k_2 < \ldots < k_p \leqslant m} P\left(A_{k_1} \cap A_{k_2} \cap \ldots \cap A_{k_p}\right) + \cdots +$$

$$+(-1)^{m+1} P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_m).$$

Proprietăţi ale funcţiei de probabilitate

Demonstraţie: Procedăm prin inducţie după m: pentru $m = 2$ avem propoziţia 2 (ii). Presupunem acum că proprietatea este adevărată pentru orice $(m-1)$ evenimente aleatoare.

$$P\left(\bigcup_{k=1}^{m} A_k\right) = P\left(\bigcup_{k=1}^{m-1} A_k\right) - P\left[\left(\bigcup_{k=1}^{m-1} A_k\right) \cap A_m\right] + P(A_m) = \tag{1}$$

$$= P\left(\bigcup_{k=1}^{m-1} A_k\right) - P\left[\bigcup_{k=1}^{m-1} (A_k \cap A_m)\right] + P(A_m).$$

Pentru primele două sume aplicăm ipoteza inductivă şi obţinem

$$P\left(\bigcup_{k=1}^{m-1} A_k\right) = \sum_{k=1}^{m-1} P(A_k) - \sum_{1 \leqslant k_1 < k_2 \leqslant m-1} P(A_{k_1} \cap A_{k_2}) + \cdots + \tag{2}$$

$$+(-1)^{p+1} \sum_{1 \leqslant k_1 < k_1 < \ldots < k_p \leqslant m-1} P\left(A_{k_1} \cap A_{k_2} \cap \ldots \cap A_{k_p}\right) + \cdots +$$

Proprietăţi ale funcţiei de probabilitate

$$+(-1)^m P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{m-1}),$$

$$P\left[\bigcup_{k=1}^{m-1} (A_k \cap A_m)\right] = \sum_{k=1}^{m-1} P(A_k \cap A_m) - \tag{3}$$

$$= \sum_{1 \leqslant k_1 < k_2 \leqslant m-1} P(A_{k_1} \cap A_{k_2} \cap A_m) + \cdots +$$

$$+(-1)^{p+1} \sum_{1 \leqslant k_1 < k_1 < \ldots < k_p \leqslant m-1} P\left(A_{k_1} \cap A_{k_2} \cap \ldots \cap A_{k_p} \cap A_m\right) + \cdots +$$

$$+(-1)^{m+1} P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{m-1} \cap A_m).$$

Combinând (1), (2) şi (3) obţinem proprietatea dorită. ■

Probabilitatea evenimentelor aleatoare elementare

- Vom nota cu $P(\omega)$ probabilitatea evenimentului aleator elementar $\{\omega\}, \forall \omega \in \Omega$. Utilizând Axioma 3, pentru orice eveniment A, avem

$$P(A) = \sum_{\omega \in A} P(\omega). \tag{4}$$

- Dacă A conţine un număr finit de elemente, atunci suma de mai sus este o sumă finită sau este o serie dacă A conţine un număr infinit de elemente. Suma este nulă dacă A este mulţimea vidă.
- Obţinem o definiţie echivalentă a funcţiei de probabilitate dacă înlocuim Axioma 3 cu

  Axioma 3'. Pentru orice eveniment aleator A

$$P(A) = \sum_{\omega \in A} P(\omega).$$

Evenimente aleatoare elementare echiprobabile

În multe situaţii Ω constă din evenimente elementare egal probabile şi în număr finit:

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}, P(\omega_i) = p, \forall 1 \leqslant i \leqslant n,$$

atunci

$$P(\Omega) = 1 = \sum_{i=1}^{n} P(\omega_i) = np, \text{ i. e., } P(\omega_i) = p = \frac{1}{n}, \forall i.$$

Să considerăm, în acest caz, un eveniment aleator A, cu $|A| = k$, $A = \{\omega_{i_1}, \omega_{i_2}, \ldots, \omega_{i_k}\}$, atunci

$$P(A) = \sum_{j=1}^{k} P(\omega_{i_j}) = \frac{k}{n} = \frac{|A|}{|\Omega|}.$$

Evenimente aleatoare elementare echiprobabile

Am demonstrat în acest fel

Propoziţia 4

Dacă Ω este finită şi evenimentele aleatoare elementare sunt egal probabile, atunci probabilitatea unui eveniment aleator A se determină ca raportul dintre numărul de elemente din A şi numărul de elemente din Ω.

- În acest caz probabilitatea unui eveniment aleator este numărul de cazuri favorabile supra numărul total de cazuri posibile. Practic, calculul probabilităţilor devine o problemă de numărare.
- Situaţiile în care se poate aplica rezultatul de mai sus trebuie sa fie distinse cu grijă pentru că *nu întotdeauna evenimentele elementare sunt egal probabile*. Drept reper putem folosi principiul subînţeles al simetriei: evenimente similare sau "identice" au probabilităţi egale.

Evenimente aleatoare elementare echiprobabile

Exemplu. Atunci când extragem o bilă dintr-o urnă se înţelege că orice bilă are aceeaşi probabilitate de a fi extrasă. Dacă în urnă avem bile de culori diferite: două bile albe şi trei bile negre, nu mai putem presupune că fiecare culoare are aceleaşi şanse de a fi extrasă. ♣

Exemplu. Dacă se aruncă un zar obişnuit, probabilitatea să apară pe faţă unul dintre numerele $\{1, 2, \ldots, 6\}$ este aceeaşi. Dacă însă pe trei dintre feţe este înscris numărul 1, iar pe celelalte feţe numerele 2, 3 şi 4, atunci, la aruncarea zarului apariţia numărului 1 nu mai este egală cu a celorlalte trei numere. ♣

Exerciţii propuse spre rezolvare pentru seminar

- Evenimente aleatoare: I.1, I.3, I.5
- Funcţia de probabilitate: II.1 (b,c), II.2 (c), II.3 (sau II.4), II.5 (sau II.6), II.8 (sau II.9), II.14
- Rezervă: II.12, II.18, II.19

Sfârşit

Exerciţii - evenimente aleatoare

I.1. Trei jucători, 1, 2 şi 3 aruncă pe rând, în această ordine, o monedă. Câştigă cel care obţine primul stema. Mulţimea evenimentelor elementare poate fi descrisă astfel (0 pentru ban şi 1 pentru stemă)

$$\Omega = \{1, 01, 001, 0001, \ldots, 0000 \cdots 01, \ldots\}$$

a) Determinaţi evenimentele aleatoare $A_i =$ "jucătorul i câştigă jocul, $i = \overline{1,3}$".

b) Determinaţi evenimentele aleatoare $\overline{A_1 \cup A_3}$, $\overline{A_1} \cup A_2$, $A_1 \cup A_2 \cup A_3$ şi $\overline{A_1 \cup A_2 \cup A_3}$.

c) Arătaţi că $A_1 \cup A_3 \subseteq \overline{A_2}$. Este adevărat că $A_1 \cup A_3 = \overline{A_2}$?

Exerciţii - evenimente aleatoare

I.2. Se aruncă două zaruri (unul roşu şi unul negru). Fie A evenimentul "suma zarurilor este un număr impar", $B =$ "cel puţin unul dintre zaruri are valoarea 1" şi $C =$" suma zarurilor este 5". Descrieţi evenimentele $A \cap B$, $A \cup C$, $B \cap C$, $A \cap C$, $\overline{A} \cap B$ şi $A \cap B \cap \overline{C}$.

I.3. Fie A şi B două evenimente asociate unui experiment aleator. Arătaţi că

a) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$, $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$;

b) $A \cup \overline{B} = \overline{\overline{A} \cap B}$, $A \cap B = B \cap (A \cup \overline{B})$;

c) $A \cap B = B \cap \overline{(\overline{A} \cap B)}$, $A \cap B = B \setminus (\overline{A} \cap B)$.

Exerciţii - evenimente aleatoare

I.4. Fie A şi B evenimente aleatoare. Simplificaţi următoarele expresii

a) $(A \cup B) \cap (A \cup \overline{B})$;

b) $(A \cup B) \cap (A \cup \overline{B}) \cap (\overline{A} \cup B)$.

I.5. Fie A, B şi C trei evenimente aleatoare asociate unui experiment. Determinaţi, în funcţie de A, B şi C, expresiile corespunzătoare următoarelor evenimente

a) dintre cele trei evenimente se realizează doar A;

b) se realizează A şi C dar nu şi B.

c) cel puţin două dintre cele trei evenimente se realizează;

d) se realizează exact unul dintre cele trei evenimente;

e) se realizează cel mult trei dintre ele.

Exerciţii - evenimente aleatoare

I.6. Fie A şi B evenimente aleatoare.

a) Arătaţi că $\overline{A} = (\overline{A} \cap B) \cup (\overline{A} \cap \overline{B})$ şi $\overline{B} = (A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap \overline{B})$;

b) Arătaţi că $\overline{A \cap B} = (\overline{A} \cap B) \cup (\overline{A} \cap \overline{B}) \cup (A \cap \overline{B})$.

c) Se aruncă un zar şi se notează cu A evenimentul că apare un număr impar, iar cu B evenimentul că apare un număr mai mic decât 4. Determinaţi evenimentele din stânga şi din dreapta semnului de egalitate de la punctul b).

Exerciţii - Funcţia de probabilitate

II.1. Fie A şi B două evenimente aleatoare. Arătaţi că

a) $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 1 - P(A) - P(B) + P(A \cap B)$;

b) $P(A \cup B) = P(A \setminus B) + P(A \cap B) + P(B \setminus A)$;

c) $P(A \Delta B) = P(A) - 2P(A \cap B) + P(B)$.

II.2. Arătaţi că pentru trei evenimente aleatoare A, B, C au loc următoarele relaţii

a) $P(A \cap B) + P[(A \setminus B) \cup (B \setminus A)] + P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 1$;

b) $P(\overline{A} \cap \overline{B}) + P(A) + P(\overline{A} \cap B) = 1$;

c) $P(\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}) + P(A) + P(\overline{A} \cap B) + P(\overline{A} \cap \overline{B} \cap C) = 1$;

d) $P(A \cap B) - P(A)P(B) = P(\overline{A} \cap \overline{B}) - P(\overline{A})P(\overline{B})$.

Exerciţii - Funcţia de probabilitate

II.3. Se consideră un experiment aleator cu $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_6\}$. Se ştie că $P(\{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}) = 1/2$, $P(\{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5\}) = 5/6$ şi $P(\{\omega_1, \omega_2\}) = 1/6$. Considerăm evenimentele $A = \{\omega_1, \omega_2, \omega_4, \omega_5\}$, $B = \{\omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}$ şi $C = \{\omega_3, \omega_4, \omega_5\}$.

a) Evenimentele A şi B sunt compatibile? Dar A şi C?

b) Calculaţi $P(A \cup (B \setminus C))$, $P(A \Delta B)$, $P(A \cup C)$ şi $P(B \setminus A)$.

c) Este posibil ca $P(\{\omega_1, \omega_2\}) = 1/4$, $P(\{\omega_2, \omega_3, \omega_5, \omega_6\}) = 3/8$ şi $P(\{\omega_1, \omega_2, \omega_4\}) = 15/16$?

II.4. Se consideră un experiment aleator cu $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_6\}$. Se ştie că $P(\{\omega_1\}) = P(\{\omega_2\}) = 1/6$ şi $P(\{\omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5\}) = 2/3$. Considerăm evenimentul $A = \{\omega_3, \omega_4, \omega_5\}$. Definiţi un eveniment B incompatibil cu A, dar nu contrar lui A.

a) Arătaţi că $P(A \cup B) < 1$.

b) Calculaţi $P(A \setminus B)$, $P(A \cap B)$, $P(\overline{B})$ şi $P(A \Delta B)$.

c) Este posibil ca $P(\{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}) = 1/4$, $P(\{\omega_2, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}) = 2/3$ şi

Exerciţii - Funcţia de probabilitate

II.5. Fie A şi B două evenimente aleatoare astfel încât $P(B \setminus A) = 1/3$, $P(A \cap B) = 1/6$ şi $P(A \setminus B) = 1/3$.

a) Calculaţi $P(A)$, $P(A \Delta B)$, $P(A \cup B)$ şi $P(A \setminus \overline{B})$.

b) Evenimentele A şi B sunt contrare? A şi $\overline{B}$ sunt compatibile?

II.6. Fie A şi B două evenimente aleatoare astfel încât $P(A \setminus B) = 1/6$, $P(A \cap B) = 1/6$ şi $P(B \setminus A) = 1/3$.

a) Calculaţi $P(A \cup B)$, $P(A \Delta B)$, $P(\overline{A} \cap B)$ şi $P(\overline{A} \setminus B)$.

b) Evenimentele A şi B sunt compatibile? A şi $B \setminus A$ sunt contrare?

II.7. Fie A şi B două evenimente aleatoare astfel încât $P(A \setminus B) = 2/7$, $P(A \cap B) = 1/7$ şi $P(A \Delta B) = 5/7$.

a) Calculaţi $P(A)$, $P(B)$, $P(A \cup B)$, $P(\overline{A} \setminus B)$ şi $P(B \setminus A)$.

b) Evenimentele A şi B sunt contrare? Dar compatibile?

Exerciţii - Funcţia de probabilitate

II.8. Se aruncă două zaruri şi se notează $A =$"suma zarurilor este un număr prim" şi $B =$"produsul zarurilor este $\geqslant 19$".

a) Calculaţi $P(A)$, $P(B)$, $P(A \Delta B)$, $P(A \cup B)$ şi $P(A \setminus B)$.

b) Evenimentele A şi B sunt contrare? Dar compatibile?

(c) Definiţi un eveniment aleator care să implice A şi să fie incompatibil cu B.

II.9. Se aruncă două zaruri şi se notează $A =$"produsul valorilor este cel mult 10" şi $B =$"cel puţin unul dintre zaruri este prim".

a) Calculaţi $P(A)$, $P(\overline{B})$, $P(A \Delta B)$, $P(A \cap B)$ şi $P(B \setminus A)$.

b) Evenimentele A şi B sunt contrare? Dar compatibile?

(c) Definiţi un eveniment aleator care să fie compatibil cu A dar nu cu B.

Exerciţii - Funcţia de probabilitate

II.10. Fie A şi B două evenimente aleatoare incompatibile pentru care se cunosc $P(A) = 0.3$ şi $P(B) = 0.5$. Care este probabilitatea ca

a) să se realizeze A sau B?

b) să se realizeze B dar nu şi A?

c) să se realizeze simultan cele două evenimente?

II.11. Doi jucători de şah seniori, s_1 şi s_2 şi trei juniori j_1, j_2 şi j_3 se întâlnesc într-un turneu. Orice senior are probabilitatea de a câştiga turneul dublă faţă de cea a unui junior.

a) Determinaţi şansele de a câştiga turneul ale unui junior.

b) Care este probabilitatea ca s_1 sau j_1 să câştige turneul?

Exerciţii - Funcţia de probabilitate

II.12. 60% dintre studenţii unei anumite grupe sunt genii (în informatică), 70% sunt amatori de ciocolată, iar 40% fac parte simultan din ambele categorii. Se alege la întâmplare un student din această grupă. Care este probabilitatea ca el să nu fie nici amator de ciocolată şi nici geniu?

II.13. Pentru ca o rezoluţie să ajungă în faţa preşedintelui S.U.A. trebuie să treacă prin Senat şi prin Camera Reprezentanţilor. Dintre toate rezoluţiile prezentate acestor două corpuri legislative 60% trec de Cameră, 70% trec de Senat şi 80% trec de cel puţin unul dintre cele două corpuri. Să se calculeze probabilitatea ca

a) o rezoluţie oarecare să ajungă la preşedinte.

b) o rezoluţie oarecare să treacă de exact una dintre camerele legiuitoare.

Exerciţii - Funcţia de probabilitate

II.14. Un elev trebuie să aleagă două dintre următoarele cursuri: franceză, matematici şi istorie. El alege istorie cu probabilitate 5/8, franceză cu probabilitate 5/8 şi alege franceză şi istorie cu probabilitate 1/4. Care este probabilitatea pentru ca elevul să aleagă matematici? Dar probabilitatea ca el să aleagă istorie sau franceză?

II.15. Într-o cursă hipică se întrec trei cai: H_1, H_2 şi H_3. H_1 are de două ori mai multe şanse ca H_2 să câştige, iar H_2 de două ori mai multe şanse ca H_3 să câştige.

a) Care sunt probabilităţile de a câştiga ale celor trei cai?

b) Dar probabilitatea ca nici primul, nici al doilea cal să nu câştige?

Exerciţii - Funcţia de probabilitate

II.16*. Doi studenţi x şi y urmează un curs la care, în urma examinării, se poate obţine unul din următoarele calificative: A, B sau C. Probabilitatea ca x să obţină B este 0.3. Probabilitatea ca y să obţină B este 0.4. Probabilitatea ca nici unul să nu obţină A dar cel puţin unul să obţină B este 0.1. Care este probabilitatea ca cel puţin unul dintre studenţi să obţină B dar nici unul să nu obţină C?

II.17*. Într-o urnă sunt zece bile numerotate de la 1 la 10; din urnă se extrag două bile. Care este probabilitatea ca suma celor două numere astfel obţinute să fie impară dacă

a) cele două bile sunt extrase simultan?

b) cele două bile sunt extrase una după alta fără întoarcere?

c) cele două bile sunt extrase una după alta cu întoarcere?

Exerciţii - Funcţia de probabilitate

II.18*. Un zar este construit în aşa fel încât probabilitatea de a apărea o faţă este proporţională cu numărul de pe acea faţă.

a) Care este probabilitatea de a obţine o faţă cu număr par la o aruncare?

b) Dar probabilitatea de a obţine un număr prim?

II.19**. Fie A_1, A_2 şi A_3 trei evenimente asociate unui experiment aleator.

a) În ce condiţii are loc relaţia

$$P(A_1 \cap (A_2 \cup A_3)) = P(A_1 \cap A_2) + P(A_1 \cap A_3) + P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)?$$

b) Demonstraţi că, dacă $A \cap B \cap C = \varnothing$, atunci

$$P[(A \cup B) \cap (B \cup C) \cap (C \cup A)] = P(A \cap B) + P(B \cap C) + P(C \cap A).$$

Exerciţii - Funcţia de probabilitate

II.20. Un zar este construit în aşa fel încât orice faţă pară pare are probabilitatea de a apărea dublă decât orice faţă impară. Care este probabilitatea ca la o aruncare să se obţină

a) o faţă cu număr impar?

b) o faţă cu număr mai mic sau egal cu 4?

b) o faţă cu număr prim par?

II.21*. Dacă $P(A) = 0.9$ şi $P(B) = 0.8$, arătaţi că $P(A \cap B) \geqslant 0.7$.

a) Arătaţi că $P(A \cap B) \geqslant P(A) + P(B) - 1$.

b) Demonstraţi prin inducţie inegalitatea lui Bonferroni: pentru n evenimente aleatoare $A_1, A_2, \ldots A_n$ avem

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) \geqslant \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - n + 1.$$

Exerciţii - Funcţia de probabilitate

II.22*. Se consideră un experiment care are un număr infinit numărabil de evenimente aleatoare elementare:

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n, \ldots\}.$$

a) Arătaţi că nu este posibil ca toate evenimentele elementare să aibă o aceeaşi probabilitate nenulă.

b) Este posibil ca toate evenimentele elementare să aibă probabilitate nenulă?

II.23*. Se consideră un experiment aleator şi Ω mulţimea evenimentelor elementare. Să se arate că funcţia $d : \mathcal{P}(\Omega) \times \mathcal{P}(\Omega) \to [0, 1]$, definită prin $d(A, B) = P(A \Delta B)$ este o metrică pe familia evenimentelor aleatoare $\mathcal{P}(\Omega)$.

Exerciţii - Funcţia de probabilitate

II.24*. Fie $A_1, A_2, \ldots, A_n$ evenimente aleatoare cu proprietăţile:

(i) $A_i \subseteq \bigcup\limits_{j \neq i} A_j, \forall\, i = \overline{1, n}$;

(ii) $A_i \cap A_j \cap A_k = \varnothing, \forall\, 1 \leqslant i < j < k \leqslant n$.

Să se arate că

$$2P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i).$$

Bibliography

- Bertsekas, D. P., J. N. Tsitsiklis, *Introduction to Probability*, Athena Scietific, 2002.
- Gordon, H., *Discrete Probability*, Springer Verlag, New York, 1997.
- Lipschutz, S., *Theory and Problems of Probability*, Schaum's Outline Series, McGraw-Hill, 1965.
- Ross, S. M., *A First Course in Probability* , Prentice Hall, 5th edition, 1998.
- Stone, C. J., *A Course in Probability and Statistics*, Duxbury Press, 1996.