Laborator 3 - Simularea variabilelor aleatoare.
(Illustrări ale LNM şi TLC)

I. Distribuţii continue remarcabile

RStudio. Nu uitaţi să alegeţi directorul de lucru: **Session** → **Set Working Directory** → **Choose Directory**.

Exerciţiu rezolvat. Representaţi grafic funcţia de densitate a distribuţie exponenţiale, $Exp(\lambda)$ ($\lambda > 0$).

Această distribuţie se anulează pe toată semiaxa negativă, deci este sufficient sa o reprezentăm pe semiaxa pozitivă (vom folosi, de fapt, un interval de forma $[0, a]$).

```
density_exponential = function(lambda, n, a) {
   x = seq(0, a, n;
   y = dexp(x, lambda);
   plot(x, y, type = 'l');
}
```

Exerciţiu propus.

I.1. Scrieţi o funcţie care să reprezinte grafic densităţile următoarelor distribuţii:

(a) $Gamma(\alpha, \lambda)$.

(b) $Student(r)$.

(c) $N(\mu, \sigma^2)$.

II. Legea numerelor mari (LNM).

Fie X_i, $1 \leqslant i \leqslant n$, un şir de variabile aleatoare independente şi identic distribuite, media lor aritmetică este

$$\overline{x}_n = \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n},$$

Atunci, conform LNM, $\overline{x}_n \to \mu$, unde $\mu = \mathbb{E}[X_i]$, $\forall 1 \leqslant i \leqslant n$.

Exerciţiu rezolvat. Verificaţi LNM utilizând şirup de variabile $X_i : Poisson(\lambda)$, $1 \leqslant i \leqslant n$. (Se ştie că $\mathbb{E}[X_i] = \lambda$.)

```
LLN_Poisson = function(lambda, n) {
   sum = 0;
   for(i in 1:n) {
      u = rpois(1, lambda);
      sum = sum + u;
   }
   return(sum/n);
}
```

O variantă mai simplă şi mai rapidă:

```
LLN_Poisson = function(lambda, n) {
   return(mean(rpois(n, lambda)));
}
```

Exerciţiu rezolvat. Verificaţi LNM utilizând şirup de variabile $X_i : Gamma(\alpha, \lambda)$, $1 \leqslant i \leqslant n$. (Se ştie că $\mathbb{E}[X_i] = \alpha/\lambda$.)

Folosim aici doar varianta mai simplă:

```
LLN_Gamma = function(alfa, lambda, n) {
  return(mean(rgamma(n, alfa, lambda)));
}
```

Exerciţii propuse.

II.1. Scrieţi câte o funcţie care să verifice LNM pentru următoarele şiruri de variabile aleatoare

(a) $X_i : Exponential(\lambda)$, $1 \leqslant i \leqslant n$. (Ştim că $\mathbb{E}[X_i] = 1/\lambda$.)

(b) $X_i : B(m, p)$, $1 \leqslant i \leqslant n$. (Ştim că $\mathbb{E}[X_i] = mp$.)

II.2 Rezolvaţi acelaşi exerciţiu pentru şirul de variabile aleatoare $X_i : Student(r)$, $1 \leqslant i \leqslant n$, pentru care se ştie că $\mathbb{E}[X_i] = 0$. Comparaţi rezultatele cu valorile exacte pentru următorii parametri: $n \in \{1000, 10000, 100000, 1000000\}$ and $r \in \{2, 3, 4, 5\}$.

III. Teorema Limită Centrală (TLC).

Fie X_i, $1 \leqslant i \leqslant n$, un şir de variabile aleatoare independente şi identic distribuite şi fie

$$\overline{x}_n = \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n}$$

media lor aritmetică, atunci, conform TLC, $\overline{x}_n$ (pentru valori foarte mari ale lui n) urmează o distribuţie $N(\mu, \sigma^2)$.

După standardizarea mediei de selecţie obţinem că $\dfrac{\overline{x}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} : N(0, 1)$.

Exerciţiu rezolvat. Verificaţi TLC folosind şirul de variabile aleatoare $X_i : Poisson(\lambda)$, $1 \leqslant I \leqslant n$. (Se ştie că $\mathbb{E}[X_i] = \lambda$ şi $Var[X_i] = \lambda$.)

TLC spune că

$$P\left(\frac{\overline{x}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \leqslant z\right) \cong P(Z \leqslant z),$$

Unde $z \in \mathbb{R}$ şi $Z : N(0, 1)$ - legea normală standard. Probabilitatea din dreapta este $pnorm(z)$, în timp ce probabilitatea din stânga poate fi aproximată prin astfel: fie N (un număr foarte mare) de eşantioane aleatoare simple, fiecare de dimensiune n, $\left(X_i^k\right)_{i=\overline{1,n}}^{k=\overline{1,N}}$, apoi calculăm

$$P^N(z) = \frac{|\{k \,:\, \overline{x}_n^k \leqslant z\sigma/\sqrt{n} + \mu\}|}{N}.$$

(X_i^k sunt valori simulate conform distribuţiei date - Poisson în cazul exerciţiului de faţă). Se compară apoi această probabilitate cu $pnorm(z)$.

```
CLT_Poisson = function(lambda, n, N, z) {
  expectation = lambda;
  st_dev = lambda;
  upper_bound = z * st_dev/sqrt(n) + expectation;
  sum = 0;
  for(i in 1:N) {
    x_n = mean(rpois(n, lambda));
    if(x_n ⩽ upper_bound) {
      sum = sum + 1;
    }
  }
  return(sum/N);
}
```

Remarcă: n ar trebui să fie cel puţin 30; e. g., $n = 30$, $N = 10000$, $z \in \{0, 1, 1.5, 2\}$.

Exerciţii propuse.

III.1. Scrieţi o funcţie care să verifice TLC folosind şirul de variabile aleatoare $X_i : Exponential(\lambda)$, $1 \leqslant i \leqslant n$. (Ştim că $\mathbb{E}[X_i] = 1/\lambda, Var[X_i] = 1/\lambda^2$.)

III.2 Rezolvaţi acelaşi exerciţiu pentru şirul de variabile aleatoare $X_i : Gamma(\alpha, \lambda)$, $1 \leqslant i \leqslant n$. (We know that $\mathbb{E}[X_i] = \alpha/\lambda$ and $Var[X_i] = \alpha/\lambda^2$.). Choose $n = 50$, $N \in \{5000, 10000, 20000\}$, and $z \in \{-1.5, 0, -1.5\}$.

IV. Aproximarea de Moivre-Laplace

Fie $X : B(n, p)$; probabilităţile legate de această distribuţie pot fi aproximate folosind legea normală (din Teorema Limită Centrală - TLC).

$$P(X = k) = P(k - 0.5 \leqslant X \leqslant k + 0.5) =$$
$$= P\left(\frac{k - 0.5 - np}{\sqrt{np(1-p)}} \leqslant \frac{X - np}{\sqrt{np(1-p)}} \leqslant \frac{k + 0.5 - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right) \cong$$
$$\cong \Phi\left(\frac{k + 0.5 - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right) - \Phi\left(\frac{k - 0.5 - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right),$$

unde $\Phi(\cdot)$ este funcţia de distribuţie a legii normale standard, $N(0, 1)$, i. e., $\Phi(a) = P(Z \leqslant a)$, dacă $Z : N(0, 1)$. În R $\Phi(a) = pnorm(a)$.

Exerciţiu rezolvat. Fie $X : B(30, 0.35)$; determinaţi $P(X = 25)$.
$\mathbb{E}[X] = np = 30 \cdot 0.4 = 12$, $Var[X] = np(1-p) = 30 \cdot 0.4 \cdot 0.6 = 7.2$

$$P(X = 25) = P(24.5 \leqslant X \leqslant 25.5) = P\left(\frac{24.5 - 12}{\sqrt{7.2}} \leqslant \frac{X - 12}{\sqrt{7.2}} \leqslant \frac{24.5 + 12}{\sqrt{7.2}}\right) =$$
$$= P\left(4.658475 \leqslant \frac{X - 12}{\sqrt{7.2}} \leqslant 5.031153\right) \cong \Phi(4.658475) - \Phi(5.031153) =$$
$$= 0.9999998 - 0.9999984 = 0.0000004.$$

Exerciţiu rezolvat. Fie $X : B(50, 0.3)$; calculaţi $P(X > 10)$.
$\mathbb{E}[X] = np = 50 \cdot 0.3 = 15$, $Var[X] = np(1-p) = 50 \cdot 0.3 \cdot 0.7 = 10.5$

$$P(X > 10) = P(X \geqslant 11) = P(X \geqslant 10.5) = P\left(\frac{X - 15}{\sqrt{10.5}} \geqslant \frac{10.5 - 15}{\sqrt{10.5}}\right) =$$

$$= P\left(\frac{X - 15}{\sqrt{10.5}} \geqslant -1.38873\right) \cong 1 - \Phi(-1.38873) = \Phi(1.38873) = 0.9175426.$$

Exerciţiu rezolvat. Fie $X : B(n, p)$; scrieţi o funcţie care să calculeze $P(X > k)$ $(0 \leqslant k < n)$.

```
binomial_probability = function(n, p, k) {
   expectation = n*p;
   variance = n*p*(1 - p);
   standard_deviation = sqrt(variance);
   q = (k + 0.5)/standard_deviation;
   return(1 - pnorm(q));
}
```

Exerciţii propuse.

IV.1. Fie $X : B(n, p)$; scrieţi o funcţie care să calculeze $P(X < k)$ $(0 < k \leqslant n)$.

IV.2. Fie $X : B(n, p)$; scrieţi o funcţie care să calculeze $P(X > k)$ $(0 \leqslant k < n)$.