Calcul Numeric

Curs 10

Conf. dr. Anca Ignat

Conf. dr. Andreea Arusoaie

May 9, 2026

Interpolare Newton pe noduri echidistante

Presupunem că nodurile de interpolare sunt echidistante:

$$x_i = x_0 + ih, \quad i = 0, 1, \ldots, n.$$

În relația de mai sus, fie se dă h (distanța dintre două noduri succesive $h = x_{i+1} - x_i$), fie se precizează primul și ultimul nod, x_0 și x_n, iar h se calculează astfel $h = \frac{x_n - x_0}{n}$.

Astfel are loc

$$[x_i, x_{i+1}]_f = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i} = \frac{y_{i+1} - y_i}{h}.$$

Interpolare Newton pe noduri echidistante

Se introduce noțiunea de **diferență finită de ordinul 1**:

$$\Delta f(x) = f(x+h) - f(x).$$

Pornind de la această definiție se pot introduce și diferențe finite de ordin superior:

$$\Delta^2 f(x) = \Delta(\Delta f(x)) = \Delta(f(x+h) - f(x))$$

$$= f(x+2h) - 2f(x+h) + f(x).$$

În general, se pot introduce recursiv **diferențele finite de ordin** k:

$$\Delta^k f(x) = \Delta(\Delta^{k-1} f(x)) = \Delta^{k-1} f(x+h) - \Delta^{k-1} f(x).$$

Interpolare Newton pe noduri echidistante

Prin inducție după k, se poate deduce formula de calcul a diferențelor finite de ordin k folosind doar valorile funcției f.

$$\Delta^k f(x) = \sum_{i=0}^{k} (-1)^{k-i} C_k^i f(x + ih).$$

Observație: Dacă funcția f este polinom de grad m atunci $\Delta f(x)$ este polinom de grad $m - 1$, $\Delta^2 f(x)$ este polinom de grad $m - 2$, ş.a.m.d.
Prin urmare:

$$\Delta^k f(x) \equiv 0, \text{ pentru } k > m, \ f - \text{ polinom de grad m.}$$

Diferențele divizate și diferenţe finite

Legătura între diferențele divizate şi cele finite:

$$[x_i, x_{i+1}]_f = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i} = \frac{\Delta f(x_i)}{h}.$$

$$[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]_f = \frac{[x_{i+1}, x_{i+2}]_f - [x_i, x_{i+1}]_f}{x_{i+2} - x_i} = \frac{\Delta^2 f(x_i)}{2!\, h^2}.$$

Prin inducție se poate arăta următoarea legătură între diferențele divizate de ordin k și cele finite:

$$[x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+k}]_f = \frac{\Delta^k f(x_i)}{k!\, h^k}.$$

Polinoame de interpolare pe noduri echidistante

Polinomul de interpolare Lagrange în forma Newton este:

$$\ell_n(x) = y_0 + [x_0, x_1]_f(x - x_0) + [x_0, x_1, x_2]_f(x - x_0)(x - x_1)$$
$$+ \cdots + [x_0, x_1, \ldots, x_n]_f(x - x_0)\cdots(x - x_{n-1}).$$

Considerăm că punctul de interpolare este de forma:

$$\overline{x} = x_0 + th.$$

și înlocuim diferențele divizate cu diferențe finite în forma Newton a polinomului de interpolare:

Rezultă:

$$(\overline{x}-x_0)(\overline{x}-x_1)\cdots(\overline{x}-x_{k-1}) = (x_0+th-x_0)\cdot\ldots\cdot(x_0+th-x_0-(k-1)h)$$

$$= h^k\, t(t-1)\cdots(t-k+1).$$

Formula lui Newton progresivă

Polinomul de interpolare devine:

$$\begin{aligned}\ell_n(\overline{x}) = \ell_n(x_0 + th) = y_0 + \ \Delta f(x_0)t + \Delta^2 f(x_0)\frac{t(t-1)}{2!} + \cdots \\ + \Delta^k f(x_0)\frac{t(t-1)\cdots(t-k+1)}{k!} + \cdots \\ + \Delta^n f(x_0)\frac{t(t-1)\cdots(t-n+1)}{n!}.\end{aligned}$$

Această relație poartă numele de **formula lui Newton progresivă** pe noduri echidistante.

Formula lui Newton regresivă

Considerăm polinomul de interpolare Lagrange pe nodurile în ordine inversă $\{x_n, x_{n-1}, \ldots, x_0\}$:

$$\ell_n(x) = y_n + [x_n, x_{n-1}]_f(x - x_n) + [x_n, x_{n-1}, x_{n-2}]_f(x - x_n)(x - x_{n-1}) \\ + \cdots + [x_n, x_{n-1}, \ldots, x_0]_f(x - x_n)\cdots(x - x_0).$$

Dacă punctul de interpolare este de forma:

$$\overline{x} = x_n + th,$$

atunci, analog ca mai sus, obținem **formula lui Newton regresivă** pe noduri echidistante:

$$\ell_n(\bar{x}) = \ell_n(x_n + th) = y_n + t\,\Delta f(x_{n-1}) + \Delta^2 f(x_{n-2})\frac{t(t+1)}{2!} + \cdots \\ + \Delta^k f(x_{n-k})\frac{t(t+1)\cdots(t+k-1)}{k!} + \cdots \\ + \Delta^n f(x_0)\frac{t(t+1)\cdots(t+n-1)}{n!}.$$

Schema lui Aitken pentru diferențe finite

Pentru formulele lui Newton progresive/regresive, avem nevoie de calculul următoarelor diferențe finite:

Pentru formula progresivă:

$$\Delta f(x_0),\ \Delta^2 f(x_0),\ \ldots,\ \Delta^k f(x_0),\ \ldots,\ \Delta^n f(x_0).$$

Pentru formula regresivă:

$$\Delta f(x_{n-1}),\ \Delta^2 f(x_{n-2}),\ \ldots,\ \Delta^k f(x_{n-k}),\ \ldots,\ \Delta^n f(x_0).$$

Metoda de calcul a acestor diferențe finite este similară schemei lui Aitken pentru diferențele divizate.

Schema lui Aitken pentru diferențe finite

$$
\begin{array}{cccccc}
 & \text{Pas } 1 & \cdots & \text{Pas } k & \cdots & \text{Pas } n \\
y_0 & & & & & \\
y_1 & \Delta f(x_0) & & & & \\
y_2 & \Delta f(x_1) & & & & \\
\vdots & & & & & \\
y_k & \Delta f(x_{k-1}) & & \Delta^k f(x_0) & & \\
\vdots & & & \vdots & \ddots & \\
y_{n-1} & \Delta f(x_{n-2}) & & \Delta^k f(x_{n-k-1}) & & \\
y_n & \Delta f(x_{n-1}) & & \Delta^k f(x_{n-k}) & \cdots & \Delta^n f(x_0)
\end{array}
$$

Funcţii Spline

Fie nodurile

$$x_i \in [a, b], \ i = 0, \ldots, n,$$

cu

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b.$$

Se consideră funcția polinomială, continuă pe porțiuni

$$S(x) = P_i(x), \ \text{pentru } x \in [x_i, x_{i+1}], \forall i = 0, \ldots, n-1.$$

Funcţii Spline

Mai mult, funcţia polinomială se poate scrie

$$S(x) = \begin{cases} P_0(x), & x \in [x_0, x_1), \\ P_1(x), & x \in [x_1, x_2), \\ P_2(x), & x \in [x_2, x_3), \\ \vdots & \\ P_{n-2}(x), & x \in [x_{n-2}, x_{n-1}), \\ P_{n-1}(x), & x \in [x_{n-1}, x_n]. \end{cases}$$

unde $P_i(x),\ i = 0, \ldots, n$ sunt polinoame.

Funcţia $S(x)$ se numeşte **funcţie spline**.

Funcții spline liniare continue

Definiție

Funcția $S(x)$ definită mai sus se numește **funcție spline liniară continuă** dacă polinoamele

$$P_i(x), \quad i = 0, 1, \ldots, n-1$$

sunt polinoame de gradul 1 și $S(x) \in C[a, b]$, adică:

$$\lim_{\substack{x \to x_i \\ x < x_i}} S(x) = \lim_{\substack{x \to x_i \\ x > x_i}} S(x), \quad i = 1, \ldots, n-1.$$

Funcții spline liniare continue

Fie funcția $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ pentru care se cunosc valorile:

$$y_i = f(x_i), \quad i = 0, 1, \ldots, n.$$

Funcția spline liniară de interpolare S pentru funcţia f îndeplinește condițiile de interpolare:

$$S(x_i) = y_i,\ i = 0, \ldots, n.$$

Ținând seamă că polinoamele $P_i(x)$ sunt polinoame de gradul 1 și $S(x)$ este continuă vom avea condițiile:

$$\begin{cases} P_i(x_i) = y_i, \\ P_i(x_{i+1}) = y_{i+1}, \quad i = 0, \ldots, n-1. \\ P_i(x) - \text{ polinom de gradul } 1. \end{cases}$$

Funcții spline liniare continue

Din aceste condiţii rezultă

$$P_i(x) = \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} y_{i+1} + \frac{x_{i+1} - x}{x_{i+1} - x_i} y_i, \ i = 0, \ldots, n-1.$$

$$S(x_k) = P_{k-1}(x_k) = P_k(x_k) = y_k, \ k = 1, \ldots, n-1,$$

$$S(x_0) = P_0(x_0) = y_0, \quad S(x_n) = P_{n-1}(x_n) = y_n.$$

Funcții spline cubice de clasă C^2

Se consideră sistemul de noduri distincte aflate în intervalul $[a, b]$:

$$\Delta = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b\}.$$

Funcția $S(x)$ asociată divizării Δ, care îndeplinește condițiile:

$$S(x) \in C^2[a, b],$$

și pentru care polinoamele

$$P_i(x), \quad i = 0, 1, \ldots, n-1,$$

au gradul 3, se numește **funcție spline cubică**.

Funcții spline cubice de interpolare

Dată fiind o funcție $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ cu valorile:

$$y_i = f(x_i), \quad i = 0, \ldots, n,$$

se consideră funcția spline cubică $S(x)$ de interpolare ce satisface:

$$S(x_i) = y_i, \quad i = 0, \ldots, n.$$

Pentru determinarea funcției spline cubice de interpolare observăm că polinoamele:

$$P_i(x) = \alpha_i x^3 + \beta_i x^2 + \gamma_i x + \delta_i, \quad x \in [x_i, x_{i+1}], \quad i = 0, \ldots, n-1,$$

Funcții spline cubice de interpolare

Polinoamele P_i implică determinarea a celor $4n$ necunoscute:

$$\{\alpha_i, \beta_i, \gamma_i, \delta_i \mid i = 0, 1, \ldots, n-1\},$$

pentru care se impun următoarele condiții

$$\begin{cases} n+1 \text{ condiţii din relaţiile de interpolare } S(x_i) = y_i, i = \overline{0, n}, \\ 3(n-1) \text{ condiţii de continuitate pentru } S(x), S'(x) \text{ şi } S''(x) \\ \qquad\qquad \text{în nodurile } x_i,\ i = 1, \ldots n-1, \end{cases}$$

în total $4n - 2$ condiţii.

Funcții spline cubice de interpolare

Se pot avea în vedere pentru adăugarea a două condiții suplimentarea următoarele abordări :

- fixarea pantelor în extremitățile intervalului $[a, b]$. Se presupune că funcția f este derivabilă şi se cunosc valorile $f'(a), f'(b)$. Se impun condițiile

$$S'(x_0) = P_0'(x_0) = f'(a), \quad S'(x_n) = P_{n-1}'(x_n) = f'(b);$$

- periodicitatea primelor două derivate:

$$f'(a) = f'(b) \quad (S'(x_0) = P_0'(x_0) = P_{n-1}'(x_n) = S'(x_n)),$$

$$f''(a) = f''(b) \quad (S''(x_0) = P_0''(x_0) = P_{n-1}''(x_n) = S''(x_n));$$

Funcții spline cubice de interpolare

- anularea derivatei secunde în capetele intervalului:

$$f''(a) = f''(b) = 0$$

$$(S''(x_0) = P_0''(x_0), \quad S''(x_n) = P_{n-1}''(x_n) = 0).$$

  Funcțiile spline care îndeplinesc aceste condiții se numesc *funcții spline cubice normale.*

- derivata de ordinul al treilea a funcției S este continuă în punctele x_1 și x_{n-1} . Aceasta înseamnă că polinoamele P_0, P_1 respectiv P_{n-2}, P_{n-1} coincid. Acest tip de funcție spline se numește „not - a - knot” și este utilizat în MATLAB.

Funcții spline cubice de interpolare

Ne vom ocupa în continuare de determinarea funcţiei spline de interpolare în cazul în care cunoaştem prima derivată a funcţiei f în capetele intervalului de interpolare: $f'(a), f'(b)$.

Recapitulând, vom avea următoarele condiţii :

$$\begin{cases} P_i(x_i) = y_i,\ i = 0, \dots, n-1, P_{n-1}(x_n) = y_n - \text{ interpolare,} \\ P_{i-1}(x_i) = P_i(x_i),\ i = 1, \dots, n-1, - \text{continuitatea funcţiei } S, \\ P'_{i-1}(x_i) = P'_i(x_i),\ i = 1, \dots, n-1, - \text{continuitatea primei derivate,} \\ P''_{i-1}(x_i) = P''_i(x_i),\ i = 1, \dots, n-1, - \text{continuitatea derivatei secunde,} \\ P'_0(x_0) = f'(a),\ P'_{n-1}(x_n) = f'(b). \end{cases}$$

Funcții spline cubice

Vom nota:

$$S''(x_i) = a_i, \quad i = 0, 1, \ldots, n.$$

Ținând seama de faptul că funcția $S'' \in C[a, b]$ este o funcție liniară pe fiecare dintre intervalele $[x_i, x_{i+1}]$, rezultă că:

$$S''(x) = \frac{x - x_i}{h_i} a_{i+1} + \frac{x_{i+1} - x}{h_i} a_i, \quad x \in [x_i, x_{i+1}],$$

unde

$$h_i = x_{i+1} - x_i, \quad i = 0, 1, \ldots, n - 1.$$

Funcții spline cubice

Din relațiile

$$S'(x) = \int S''(x)\,dx, \qquad S(x) = \int S'(x)\,dx,$$

rezultă:

$$S'(x) = \frac{(x - x_i)^2}{2h_i} a_{i+1} - \frac{(x_{i+1} - x)^2}{2h_i} a_i + b_i,$$

unde

$$x \in [x_i, x_{i+1}], \quad b_i \in \mathbb{R}, \quad i = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Funcții spline cubice

Aşadar,

$$S(x) = \frac{(x - x_i)^3}{6h_i} a_{i+1} + \frac{(x_{i+1} - x)^3}{6h_i} a_i + b_i x + c_i,$$

unde

$$x \in [x_i, x_{i+1}], \quad b_i, c_i \in \mathbb{R}, \quad i = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Deci

$$P(x) = \frac{(x - x_i)^3}{6h_i} a_{i+1} + \frac{(x_{i+1} - x)^3}{6h_i} a_i + b_i x + c_i.$$

Funcții spline cubice

Vom calcula funcția spline pentru cazul:

$$S'(a) = P_0'(x_0) = f'(a),$$

$$S'(b) = P_{n-1}'(x_n) = f'(b).$$

Impunând condițiile de interpolare și de continuitate vom obține:

$$P_i(x_i) = \frac{h_i^2}{6}a_i + b_i x_i + c_i = y_i,$$

$$P_i(x_{i+1}) = \frac{h_i^2}{6}a_{i+1} + b_i x_{i+1} + c_i = y_{i+1}, \quad i = 0, \ldots, n-1.$$

Funcții spline cubice

Din relațiile de mai sus, calculăm b_i și c_i în funcție de $a_i, a_{i+1}, y_i, y_{i+1}$:

$$b_i = \frac{y_{i+1} - y_i}{h_i} - \frac{h_i}{6}(a_{i+1} - a_i),$$

$$c_i = \frac{x_{i+1}y_i - x_i y_{i+1}}{h_i} - \frac{h_i}{6}(x_{i+1}a_i - x_i a_{i+1}), \quad i = 0, \dots, n-1. \tag{*}$$

Avem:

$$P_0'(x) = \frac{(x - x_0)^2}{2h_0}a_1 - \frac{(x_1 - x)^2}{2h_0}a_0 + b_0,$$

$$P_{n-1}'(x) = \frac{(x - x_{n-1})^2}{2h_{n-1}}a_n - \frac{(x_n - x)^2}{2h_{n-1}}a_{n-1} + b_{n-1}.$$

Funcții spline cubice

Din condiția $S'(a) = P_0'(x_0) = f'(a)$ avem:

$$P_0'(x_0) = -\frac{h_0}{2}a_0 + b_0 = -\frac{2h_0}{6}a_0 - \frac{h_0}{6}a_1 + \frac{y_1 - y_0}{h_0} = f'(a).$$

Rezultă:

$$2h_0a_0 + h_0a_1 = 6\left(\frac{y_1 - y_0}{h_0} - f'(a)\right) \tag{1}$$

Din condiţia $S'(b) = P_{n-1}'(x_n) = f'(b)$ avem

$$P_{n-1}'(x_n) = \frac{h_{n-1}}{2}a_n + b_{n-1} = \frac{h_{n-1}}{6}a_{n-1} + \frac{h_{n-1}}{6}a_n + \frac{y_n - y_{n-1}}{h_{n-1}} = f'(b)$$

$$h_{n-1}a_{n-1} + 2h_{n-1}a_n = 6\left(f'(b) - \frac{y_n - y_{n-1}}{h_{n-1}}\right). \tag{2}$$

Funcții spline cubice

Din condiția de continuitate a primei derivate a funcției spline cubice: $P'_{i-1}(x_i) = P'_i(x_i),\ i = 1, \ldots, n-1$, ținând seama de:

$$P'_{i-1}(x) = \frac{(x - x_{i-1})^2}{2h_{i-1}} a_i - \frac{(x_i - x)^2}{2h_{i-1}} a_{i-1} + b_{i-1},$$

$$P'_i(x) = \frac{(x - x_i)^2}{2h_i} a_{i+1} - \frac{(x_{i+1} - x)^2}{2h_i} a_i + b_i.$$

Funcții spline cubice

Utilizând formulele (*) pentru b_{i-1} și b_i deduse mai sus, avem

$$P'_{i-1}(x_i) = \frac{h_{i-1}}{2}a_i + \frac{y_i - y_{i-1}}{h_{i-1}} - \frac{h_{i-1}}{6}(a_i - a_{i-1}),$$

$$P'_i(x_i) = -\frac{h_i}{2}a_i + \frac{y_{i+1} - y_i}{h_i} - \frac{h_i}{6}(a_{i+1} - a_i)$$

sau

$$h_{i-1}a_{i-1} + 2(h_{i-1} + h_i)a_i + h_i a_{i+1} = 6\left(\frac{y_{i+1} - y_i}{h_i} - \frac{y_i - y_{i-1}}{h_{i-1}}\right), \tag{3}$$

unde $\quad i = 1, \ldots, n-1.$

Funcții spline cubice

Sistemul liniar format din ecuațiile (1), (3), (2), cu necunoscutele $\{a_0, a_1, \ldots, a_n\}$, are forma:

$$Ha = f, \quad \text{cu } H \in \mathbb{R}^{(n+1)\times(n+1)}, \quad f \in \mathbb{R}^{n+1}.$$

Aşadar, ecuațiile sistemului sunt:

$$2h_0a_0 + h_0a_1 = 6\left(\frac{y_1 - y_0}{h_0} - f'(a)\right),$$

$$h_{i-1}a_{i-1} + 2(h_{i-1} + h_i)a_i + h_ia_{i+1} = 6\left(\frac{y_{i+1} - y_i}{h_i} - \frac{y_i - y_{i-1}}{h_{i-1}}\right),$$

$$h_{n-1}a_{n-1} + 2h_{n-1}a_n = 6\left(f'(b) - \frac{y_n - y_{n-1}}{h_{n-1}}\right).$$

unde $i = 1, \ldots, n-1$,

Funcții spline cubice

Matricea asociată sistemului va fi

$$H = \begin{bmatrix} 2h_0 & h_0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ h_0 & 2(h_0 + h_1) & h_1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & h_1 & 2(h_1 + h_2) & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2(h_{n-2} + h_{n-1}) & h_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & h_{n-1} & 2h_{n-1} \end{bmatrix}$$

Funcții spline cubice

Vectorul termenilor liberi, va fi

$$f = \begin{bmatrix} 6\left(\dfrac{y_1 - y_0}{h_0} - f'(a)\right) \\ \vdots \\ 6\left(\dfrac{y_{i+1} - y_i}{h_i} - \dfrac{y_i - y_{i-1}}{h_{i-1}}\right), \\ \vdots \\ 6\left(f'(b) - \dfrac{y_n - y_{n-1}}{h_{n-1}}\right) \end{bmatrix}, \; i = 1, \ldots, n-1$$

Matricea H are diagonala dominantă atât pe linii cât şi pe coloane, este simetrică şi pozitiv definită prin urmare putem utiliza metoda Gauss-Seidel sau o metodă de relaxare pentru rezolvarea sistemului $Ha = f$.

Interpolare în sensul celor mai mici pătrate

Fie

x	x_0	x_1	x_2	$\cdots$	x_{n-1}	x_n
f	y_0	y_1	y_2	$\cdots$	y_{n-1}	y_n

$$f(x_i) = y_i, \quad i = 0, \ldots, n.$$

Dorim să aproximăm funcția f printr-un polinom:

$$f(x) \approx S_f(x; a_0, a_1, \ldots, a_m),$$

unde

$$S_f(x; a_0, a_1, \ldots, a_m) = a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \cdots + a_1 x + a_0.$$

Coeficienții $a_0, a_1, \ldots, a_m$ se găsesc rezolvând o problemă în sensul celor mai mici pătrate.

Interpolare în sensul celor mai mici pătrate

Coeficienții $a_0, a_1, \ldots, a_m$ se determină din problema:

$$\min \left\{ \sum_{r=0}^{n} \left(S_f(x_r; a_0, a_1, \ldots, a_m) - y_r \right)^2 \; ; \; a_0, a_1, \ldots, a_m \in \mathbb{R} \right\}. \tag{LSP}$$

Definim funcția:

$$g : \mathbb{R}^{m+1} \longrightarrow \mathbb{R}_+,$$

$$g(a_0, a_1, \ldots, a_m) = \sum_{r=0}^{n} \left(S_f(x_r; a_0, a_1, \ldots, a_m) - y_r \right)^2 .$$

sau

$$g(a_0, a_1, \ldots, a_m) = \sum_{r=0}^{n} \left(a_m x_r^m + \cdots + a_k x_r^k + \cdots + a_1 x_r + a_0 - y_r \right)^2 .$$

Interpolare în sensul celor mai mici pătrate

Derivata parțială în raport cu a_k este:

$$\frac{\partial g}{\partial a_k}(a_0, a_1, \ldots, a_m) =$$

$$= 2\sum_{r=0}^{n}\left(a_m x_r^m + \cdots + a_k x_r^k + \cdots + a_1 x_r + a_0 - y_r\right) x_r^k.$$

Soluția problemei de minimizare (LSP) este obținută rezolvând sistemul de ecuații liniare, de dimensiune $(m+1)$:

$$\frac{\partial g}{\partial a_k}(a_0, a_1, \ldots, a_m) = 0, \quad k = 0, 1, \ldots, m.$$

$$\sum_{r=0}^{n}\left(a_m x_r^m + \cdots + a_k x_r^k + \cdots + a_1 x_r + a_0\right) x_r^k = \sum_{r=0}^{n} y_r x_r^k,$$

unde $\quad k = 0, \ldots, m.$

Interpolare în sensul celor mai mici pătrate

Adică:

$$a_0 \sum_{r=0}^{n} x_r^k + a_1 \sum_{r=0}^{n} x_r^{k+1} + \cdots + a_m \sum_{r=0}^{n} x_r^{k+m} = \sum_{r=0}^{n} y_r x_r^k, \; k = 0, \ldots, m.$$

Constantele $\{a_0, a_1, \ldots, a_m\}$ sunt soluția sistemului liniar:

$$Ba = z,$$

unde

$$B \in \mathbb{R}^{(m+1)\times(m+1)}, B = (b_{kj})_{k,j=0}^{m}, \quad z \in \mathbb{R}^{m+1}, \; z = (z_k)_{k=0}^{m}$$

Elementele matricei B și ale vectorului z sunt:

$$b_{kj} = \sum_{r=0}^{n} x_r^{k+j}, \quad z_k = \sum_{r=0}^{n} y_r x_r^k, \quad k, j = 0, \ldots, m.$$

Rezolvarea ecuațiilor neliniare

Fie $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ o funcție continuă pe intervalul $[a, b]$ astfel încât

$$f(a)f(b) < 0.$$

În aceste condiții, există $x^* \in (a, b)$ astfel încât

$$f(x^*) = 0.$$

În cele ce urmează ne propunem să aproximăm soluția x^* a ecuației neliniare:

$$f(x) = 0.$$

Rezolvarea ecuațiilor neliniare - Metoda bisecției

Metoda bisecției sau **metoda înjumătățirii intervalului**

Presupunem că:

$$f(a)f(b) < 0.$$

Pentru a aproxima soluția x^* căutată, vom construi un șir de intervale

$$\{[a_k, b_k]\ ;\ k \geq 0\},$$

care satisfac:

$$x^* \in [a_k, b_k], \quad [a_{k+1}, b_{k+1}] \subset [a_k, b_k],$$

$$b_{k+1} - b_k = \frac{b_k - a_k}{2}.$$

Rezolvarea ecuațiilor neliniare - Metoda bisecției

Pentru primul interval vom considera:

$$a_0 = a, \quad b_0 = b, \quad k = 0.$$

Considerăm punctul c de mijloc al intervalului $[a_k, b_k]$:

$$c = \frac{a_k + b_k}{2}.$$

Rezolvarea ecuațiilor neliniare - Metoda bisecției

Prin urmare, avem următoarele 3 variante:

1. $f(c) = 0$ – soluția căutată este $x^* = c$, algoritmul se oprește;
2. $f(a_k)f(c) < 0$ – soluția se găsește în intervalul (a_k, c), continuăm procedeul cu intervalul
$$[a_{k+1}, b_{k+1}] = [a_k, c];$$
3. $f(b_k)f(c) < 0$ – soluția se găsește în intervalul $x^* \in (c, b_k)$, procedeul continuă cu intervalul
$$[a_{k+1}, b_{k+1}] = [c, b_k].$$

Metoda bisecției – eroare

Dat $\varepsilon > 0$, există un interval $[a_{\bar{k}}, b_{\bar{k}}]$ astfel încât

$$x^* \in (a_{\bar{k}}, b_{\bar{k}})$$

și

$$b_{\bar{k}} - a_{\bar{k}} < \varepsilon, \quad \bar{k} > \log_2\left(\frac{b-a}{\varepsilon}\right).$$

Pentru ε suficient de mic, atât $a_{\bar{k}}$ cât și $b_{\bar{k}}$ pot fi considerate aproximații ale soluției x^*:

$$a_{\bar{k}} \approx x^* \quad \text{(prin lipsă) iar } b_{\bar{k}} \approx x^* \quad \text{(prin adaos).}$$

Metoda tangentei (Newton - Raphson)

Vom presupune că funcția $f \in C^1[a, b]$ este derivabilă pe $[a, b]$ cu derivata continuă în acest interval și satisface relația $f(a)f(b) < 0$.
Pentru a aproxima soluția x^* a ecuației $f(x) = 0$, vom construi un șir $\{x_k\}$ care converge la x^*:

$$x_k \longrightarrow x^*, \quad k \longrightarrow \infty.$$

Primul element din șir, x_0, se consideră dat.

Următorul element din șir se construiește ca fiind punctul de intersecție al tangentei la graficul funcției f în punctul

$$(x_0, f(x_0))$$

cu axa absciselor.

Metoda tangentei (Newton - Raphson)

Procedeul se repetă cu x_1 pentru a-l obține pe x_2, și așa mai departe.

$$x_1 = Ox \cap \text{ tangenta la graficul funcţiei } f \text{ în punctul } (x_0, f(x_0))$$

$$x_2 = Ox \cap \text{ tangenta la graficul funcţiei } f \text{ în punctul } (x_1, f(x_1))$$

$$\vdots$$

$$x_{k+1} = Ox \cap \text{ tangenta la graficul fcţ } f \text{ în punctul } (x_k, f(x_k))$$

Ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f într-un punct $(a, f(a))$ este următoarea (pentru o funcţie derivabilă):

$$y = f(a) + f'(a)(x - a).$$

Metoda Newton–Raphson

Pentru a calcula x_{k+1} din x_k vom considera ecuația tangentei:

$$y = f(x_k) + f'(x_k)(x - x_k).$$

Punând $y = 0$, obținem:

$$0 = f(x_k) + f'(x_k)(x_{k+1} - x_k),$$

de unde rezultă formula de recurență:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, x_0 \text{ dat.}$$

Formula de mai sus poate fi utilizată doar dacă la fiecare pas $f'(x_k) \neq 0$. Dacă la un pas avem $f'(x_k) = 0$, putem calcula câteva iterații x_k ($k \geq \bar{k}$) folosind $f'(x_{\bar{k}-1})$.

Teoremă de convergență (Newton–Raphson)

Teoremă de convergență (Newton–Raphson)

Fie $f \in C^2[a, b]$*, astfel încât:*

$$f(a)f(b) < 0, \quad f'(x) \neq 0, \quad f''(x) \neq 0, \ \forall x \in [a, b].$$

Dacă alegem punctul inițial x_0 *astfel:*

$$\begin{cases} x_0 = a, & \text{dacă } f(a)f''(a) > 0, \\ x_0 = b, & \text{dacă } f(b)f''(b) > 0, \end{cases}$$

atunci șirul $\{x_k\}_{k \geq 0}$ *construit cu metoda tangentei este: monoton, mărginit, convergent către unica soluție* x^* *a ecuației* $f(x) = 0$*.*

Ordinul de convergență este **mai mare decât 2** .

Metoda falsei poziții (metoda coardei)

Presupunem că funcția $f \in C[a,b]$ și satisface: $f(a)f(b) < 0$.
Vom construi un șir $\{x_k\} \subseteq \mathbb{R}$ care converge la soluția căutată x^*:

$$x_k \longrightarrow x^*, \quad k \longrightarrow \infty.$$

Considerăm dat primul element din șir, x_0, și un alt punct $\tilde{x}$.

Procedeul de construire a șirului este următorul:

$$\begin{aligned}
x_1 &= Ox \cap \text{ dreapta ce uneşte punctele } (\tilde{x}, f(\tilde{x})), (x_0, f(x_0)) \\
x_2 &= Ox \cap \text{ dreapta ce uneşte punctele } (\tilde{x}, f(\tilde{x})), (x_1, f(x_1)) \\
&\vdots \\
x_{k+1} &= Ox \cap \text{ dreapta ce uneşte punctele } (\tilde{x}, f(\tilde{x})), (x_k, f(x_k))
\end{aligned}$$

Metoda falsei poziţii (metoda coardei)

Ecuaţia dreptei ce trece prin punctele $(a, f(a))$ cu $(b, f(b))$ este:

$$\frac{y - f(a)}{f(a) - f(b)} = \frac{x - a}{a - b}.$$

Pentru a-l obţine pe x_{k+1} din x_k avem:

$$\frac{y - f(x_k)}{f(x_k) - f(\tilde{x})} = \frac{x - x_k}{x_k - \tilde{x}}, \text{ cu } y = 0.$$

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)(x_k - \tilde{x})}{f(x_k) - f(\tilde{x})} = \frac{\tilde{x} f(x_k) - x_k f(\tilde{x})}{f(x_k) - f(\tilde{x})},$$

cu $k = 0, 1, 2, \ldots, x_0, \tilde{x}$ - date.

Teoremă de convergență-Metoda falsei poziţii

Teoremă de convergență

Fie $f \in C^2[a,b]$*, cu* $f(a)f(b) < 0$, $f'(x) \neq 0$, $f''(x) \neq 0$, pentru orice $x \in [a,b]$.
Dacă alegem:

$$\begin{cases} x_0 = b \text{ și } \tilde{x} = a, & \text{pentru } f(a)f''(a) > 0, \\ x_0 = a \text{ și } \tilde{x} = b, & \text{pentru } f(b)f''(b) > 0, \end{cases}$$

atunci șirul $\{x_k\}_{k\geq 0}$ *construit cu metoda falsei poziții este monoton, mărginit, deci convergent la unica soluție* x^* *a ecuației* $f(x) = 0$.

Metoda secantei

Presupunem că funcția f este continuă, $f \in C[a, b]$ și satisface relaţia $f(a)f(b) < 0$.. Vom construi un șir $\{x_k\} \subseteq \mathbb{R}$ care converge la soluția căutată x^*,

$$x_k \to x^*, \quad k \to \infty.$$

Considerăm date primele două elemente din șir: x_0, x_1.

Procedeul de construire a șirului este următorul:

$$\begin{aligned}
& x_1 = Ox \cap \text{ dreapta ce uneşte punctele } (x_0, f(x_0)), (x_1, f(x_1)) \\
& x_2 = Ox \cap \text{ dreapta ce uneşte punctele } (x_1, f(x_1)), (x_2, f(x_2)) \\
& \vdots \\
& x_{k+1} = Ox \cap \text{ dreapta ce uneşte pct. } (x_{k-1}, f(x_{k-1})), (x_k, f(x_k))
\end{aligned}$$

$k = 1, 2, \ldots$.

Metoda secantei

Obținem elementul x_{k+1} din x_k și x_{k-1} astfel:

$$\frac{y - f(x_k)}{f(x_k) - f(x_{k-1})} = \frac{x - x_k}{x_k - x_{k-1}}, \qquad \text{cu } y = 0.$$

Rezultă:

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= x_k - \frac{f(x_k)(x_k - x_{k-1})}{f(x_k) - f(x_{k-1})}. \\ &= \frac{x_{k-1} f(x_k) - x_k f(x_{k-1})}{f(x_k) - f(x_{k-1})}. \end{aligned}$$

unde $k = 1, 2, \ldots, \quad x_0, x_1$ daţi.

Teoremă de convergență (Metoda secantei)

Teoremă de convergență

Fie x^* o soluție a ecuației $f(x) = 0$.
Presupunem că $f \in C^2[x^* - r,\ x^* + r]$, $f'(x) \neq 0$, și $f''(x) \neq 0, \forall x \in [x^* - r,\ x^* + r]$. Atunci există r_0, cu $0 < r_0 \leq r$, pentru care, dacă $x_0, x_1 \in [x^* - r_0,\ x^* + r_0]$, atunci șirul $\{x_k\}$ generat de metoda secantei satisface
$x_k \in [x^* - r,\ x^* + r], \quad \forall k \geq 2$, și

$$x_k \to x^*, \quad k \to \infty.$$

Ordinul de convergență este:

$$q = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \approx 1.61803.$$

Metoda lui Laguerre

Fie polinomul

$$p(x) = a_0(x - x_1)(x - x_2) \cdot \ldots \cdot (x - x_n), \; a_0 \neq 0.$$

Metoda lui Laguerre propune construirea unui şir de numere care să conveargă la una din rădăcinile polinomului p.

Considerăm derivata polinomului p:

$$p'(x) = p(x) \left[\frac{1}{x - x_1} + \frac{1}{x - x_2} + \ldots + \frac{1}{x - x_n} \right].$$

Metoda lui Laguerre

Avem

$$\ln|p(x)| = \ln|a_0| + \ln|x - x_1| + \ln|x - x_2| + \ldots + \ln|x - x_n|.$$

$$\frac{d}{dx}\ln|p(x)| = \frac{1}{x - x_1} + \frac{1}{x - x_2} + \ldots + \frac{1}{x - x_n} = \frac{p'(x)}{p(x)} = G(x),$$

$$-\frac{d^2}{dx^2}\ln|p(x)| = \frac{1}{(x - x_1)^2} + \frac{1}{(x - x_2)^2} + \ldots + \frac{1}{(x - x_n)^2}$$

$$= \frac{[p'(x)]^2 - p(x)p''(x)}{[p(x)]^2} = H(x)$$

Metoda lui Laguerre

Fie x_1 rădăcina pe care vrem s-o aproximăm şi y_k valoarea aproximativă curentă. Notăm cu $a = y_k - x_1$ şi facem presupunerea că y_k se află la acceeaşi distanţă de toate celelalte rădăcini, adică

$$y_k - x_i = b,\ \forall i = 2, \ldots, n.$$

Prin urmare, avem

$$G(y_k) = \frac{p'(y_k)}{p(y_k)} = \frac{1}{a} + \frac{n-1}{b},$$

$$H(y_k) = \frac{[p'(y_k)]^2 - p(y_k)p''(y_k)}{[p(y_k)]^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{n-1}{b^2} \tag{4}$$

Metoda lui Laguerre

Rezolvăm sistemul (4) în raport cu a şi obţinem

$$a = \frac{n}{\max\left[G(y_k) \pm \sqrt{(n-1)(nH(y_k) - G^2(y_k))}\right]}$$

Semnul la numitor este ales astfel ca expresia să aibă magnitudine maximă.

Dacă ţinem cont de expresiile pentru G şi H obţinem pentru a următoarea formulă:

$$a = \frac{n\, p(y_k)}{\max\left[p'(y_k) \pm \sqrt{(n-1)^2[p'(y_k)]^2 - n(n-1)p(y_k)p''(y_k)}\right]}$$

Metoda lui Laguerre

Următorul element din șir va fi

$$y_{k+1} = y_k - a = y_k - \frac{n}{\max\left[G(y_k) \pm \sqrt{(n-1)\left[nH(y_k) - G^2(y_k)\right]}\right]},$$

$$y_{k+1} = y_k - \frac{n\,p(y_k)}{\max\left[p'(y_k) \pm \sqrt{(n-1)^2[p'(y_k)]^2 - n(n-1)p(y_k)p''(y_k)}\right]}$$

Procedeul se oprește când a devine suficient de mic. Metoda lui Laguerre se poate aplica și pentru aproximarea rădăcinilor complexe, precum și pentru polinoame cu coeficienți complecși.

Pentru rădăcini simple, metoda lui Laguerre are ordinul de convergență **3**.

Sisteme de ecuații neliniare

Considerăm sistemul neliniar:

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0, \\ f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0, \\ \vdots \\ f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0. \end{cases} \iff F(X) = 0, F = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}, \; X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Sisteme de ecuaţii liniare

Fie matricea jacobiană asociată funcției F. Presupunem că funcțiile f_i sunt diferențiabile.

$$\nabla F(X) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & & & \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix} (x_1, x_2, \dots, x_n)$$

Sisteme de ecuații neliniare

Pentru a găsi soluția X^* a sistemului de ecuații neliniare

$$F(X) = 0,$$

se construiește un șir de vectori $X^{(k)} \in \mathbb{R}^n$ astfel:

$$X^{(0)} \quad - \text{dat},$$

$$X^{(k+1)} = X^{(k)} - \left[\nabla F\left(X^{(k)}\right)\right]^{-1} F\left(X^{(k)}\right) = X^{(k)} + \Delta^{(k)},$$

$$\Delta^{(k)} = -\left[\nabla F\left(X^{(k)}\right)\right]^{-1} F\left(X^{(k)}\right) \in \mathbb{R}^n, \ k = 0, 1, \ldots.$$

Sisteme de ecuații neliniare

Vectorul de corecție $\Delta^{(k)}$ poate fi calculat și ca soluție a sistemului liniar:

$$\nabla F\left(X^{(k)}\right)\Delta^{(k)} = -F\left(X^{(k)}\right),$$

unde matricea sistemului este matricea jacobiană calculată în punctul $X^{(k)}$, iar vectorul termenilor liberi este $\left(-F\left(X^{(k)}\right)\right)$. Metoda descrisă mai sus poartă numele de metoda Newton. Pentru $n = 1$ metoda Newton este chiar metoda tangentei descrisă anterior.