

Calcul Numeric

Curs 9

A decorative horizontal band consisting of multiple overlapping, wavy, semi-transparent orange lines that create a sense of motion and depth across the middle of the slide.

Conf. dr. Anca Ignat

Conf. dr. Andreea Arusoaie

April 25, 2026

Descompunerea după valori singulare

Singular Value Decomposition

Descompunerea după valori singulare

Teoremă

Fie $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Atunci există o matrice ortogonală pătratică de dimensiune m , $U \in \mathbb{R}^{m \times m}$, o matrice ortogonală pătratică de dimensiune n , $V \in \mathbb{R}^{n \times n}$ și constantele pozitive:

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_r > 0, \quad r \leq \min\{m, n\}$$

astfel încât

$$A = U \Sigma V^T, \quad \Sigma \in \mathbb{R}^{m \times n}, \quad \Sigma = \begin{pmatrix} D & \mathbf{0}_{r \times (n-r)} \\ \mathbf{0}_{(m-r) \times r} & \mathbf{0}_{(m-r) \times (n-r)} \end{pmatrix}, \quad (1)$$

unde $D \in \mathbb{R}^{r \times r}$, $D = \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_r)$.

Descompunerea după valori singulare

Constanta r este chiar rangul matricei A , adică

$$r = \text{rang}(A).$$

Constantele $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_r$ se numesc *valori singulare* ale matricei A .

Folosind relația (1) avem:

$$A^T = (U\Sigma V^T)^T = V\Sigma^T U^T,$$

$$AA^T = U\Sigma V^T V\Sigma^T U^T = U\Sigma\Sigma^T U^T = U\Lambda_m U^T,$$

unde

$$\Lambda_m = \Sigma\Sigma^T = \begin{bmatrix} D^2 & \mathbf{0}_{r \times (m-r)} \\ \mathbf{0}_{(m-r) \times r} & \mathbf{0}_{(m-r) \times (m-r)} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times m},$$

Descompunerea după valori singulare

$$A^T A = V \Sigma^T U^T U \Sigma V^T = V \Sigma^T \Sigma V^T = V \Lambda_n V^T,$$

unde

$$\Lambda_n = \Sigma^T \Sigma = \begin{bmatrix} D^2 & \mathbf{0}_{r \times (n-r)} \\ \mathbf{0}_{(n-r) \times r} & \mathbf{0}_{(n-r) \times (n-r)} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}.$$

Ținând cont de ortogonalitatea matricelor U și V , putem rescrie relațiile de mai sus astfel:

$$(AA^T)U = U\Lambda_m, \quad \Lambda_m = \text{diag}(\sigma_1^2, \sigma_2^2, \dots, \sigma_r^2, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^{m \times m},$$

$$(A^T A)V = V\Lambda_n, \quad \Lambda_n = \text{diag}(\sigma_1^2, \sigma_2^2, \dots, \sigma_r^2, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^{n \times n}.$$

Descompunerea după valori singulare

Din aceste relații deducem că $\sigma_1^2, \sigma_2^2, \dots, \sigma_r^2$ sunt valorile proprii strict pozitive ale matricelor AA^T și/sau $A^T A$, iar matricile U și V sunt matrici ale căror coloane sunt vectorii proprii asociați (cei ce formează baze ortonormate).

Matricile AA^T și $A^T A$ sunt matrici simetrice:

$$(AA^T)^T = (A^T)^T A^T = AA^T, \quad (A^T A)^T = A^T (A^T)^T = A^T A,$$

și au toate valorile proprii nenegative.

$$(AA^T)\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u} \Rightarrow (AA^T\mathbf{u}, \mathbf{u}) = (\lambda\mathbf{u}, \mathbf{u})$$

$$\lambda = \frac{(A^T\mathbf{u}, A^T\mathbf{u})}{(\mathbf{u}, \mathbf{u})} = \frac{\|A^T\mathbf{u}\|_2^2}{\|\mathbf{u}\|_2^2} \geq 0.$$

Descompunerea după valori singulare

Putem folosi descompunerea după valori singulare pentru a defini pseudoinversa unei matrice oarecare, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, cu $n \neq m$.

Fie descompunerea SVD:

$$A = U\Sigma V^T.$$

Dorim să definim inversa lui A sub forma:

$$A^{-1} =? (U\Sigma V^T)^{-1} = (V^T)^{-1}\Sigma^{-1}U^{-1} = V\Sigma^{-1}U^T.$$

Rămâne de definit matricea Σ^{-1} .

Descompunerea după valori singulare

Urmând acest raționament, se definește **pseudoinversa Moore–Penrose** a matricei $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ astfel:

$$A^I = V\Sigma^I U^T, \quad A^I \in \mathbb{R}^{n \times m}, \quad \Sigma^I = \begin{pmatrix} D^{-1} & \mathbf{0}_{r \times (m-r)} \\ \mathbf{0}_{(n-r) \times r} & \mathbf{0}_{(n-r) \times (m-r)} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times m},$$

$$D^{-1} \in \mathbb{R}^{r \times r}, \quad D^{-1} = \text{diag} \left(\frac{1}{\sigma_1}, \dots, \frac{1}{\sigma_r} \right).$$

Pseudoinversa definită mai sus satisface următoarele proprietăți:

$$(A^I)^I = A, \quad \forall A \in \mathbb{R}^{m \times n}; \quad (A^T)^I = (A^I)^T, \quad \forall A \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

$$AA^I A = A, \quad A^I AA^I = A^I.$$

Descompunerea după valori singulare

Există o proprietate care nu mai este satisfăcută de pseudoinversă, deși este respectată de inversa clasică:

$$\exists A, B \text{ a. î. } (AB)^I \neq B^I A^I.$$

Descompunerea după valori singulare poate fi utilizată și pentru rezolvarea sistemelor liniare cu matrice oarecare ($m \neq n$)

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}, \quad A \in \mathbb{R}^{m \times n}, \quad \mathbf{b} \in \mathbb{R}^m, \quad \mathbf{x} := A^I \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n.$$

Problema celor mai mici pătrate

Considerăm sistemul

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b},$$

unde $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$.

În formă dezvoltată, acesta se scrie:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \vdots \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n = b_i, \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \quad (2)$$

Problema celor mai mici pătrate

Sistemul are soluții clasice dacă:

$$\text{rang } A = \text{rang}[A \mid b]$$

- $m < n$ - o infinitate de soluții;
- $m \geq n$
 - dacă $\text{rang } A = \text{rang}[A \mid b]$ soluții clasice
 - dacă $\text{rang } A \neq \text{rang}[A \mid b]$ soluții în sensul celor mai mici pătrate.

Vectorul reziduu și problema LSP

Vectorul reziduu este definit prin:

$$r(\mathbf{x}) = \mathbf{b} - A\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m.$$

Vectorul $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ se numește *soluție în sensul celor mai mici pătrate* pentru sistemul (2) dacă este soluția următoarei probleme de optimizare:

$$\min \{ \|r(\mathbf{x})\|_2^2 = \|\mathbf{b} - A\mathbf{x}\|_2^2 ; \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \}. \quad (\text{LSP})$$

Problema celor mai mici pătrate - Exemplu

Exemplu:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 2}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3, \quad m = 3, \quad n = 2.$$

$$\text{rang } A = 2 \neq \text{rang } [A \mid \mathbf{b}] = 3$$

Sistemul

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 = 0 \\ 2x_1 + 5x_2 = 0 \\ 3x_1 + 6x_2 = 0 \end{cases} \quad (3)$$

nu are soluție clasică (nu există x_1, x_2 care să satisfacă toate cele 3 ecuații simultan).

Problema celor mai mici pătrate - Exemplu

Exemplu: (continuare)

Vectorul reziduu are forma

$$r(\mathbf{x}) = \mathbf{b} - A\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_1 - 4x_2 \\ -2x_1 - 5x_2 \\ 1 - 3x_1 - 6x_2 \end{pmatrix}.$$

Soluția în sensul celor mai mici pătrate a acestui sistem este definită ca soluția problemei de optimizare:

$$\min\{(-x_1 - 4x_2)^2 + (-2x_1 - 5x_2)^2 + (1 - 3x_1 - 6x_2)^2; x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}$$

$$\min\{1 - 6x_1 - 12x_2 + 64x_1x_2 + 14x_1^2 + 77x_2^2; x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}.$$

Această problemă de minimizare are soluția:

$$x_1 = \frac{13}{18}, \quad x_2 = -\frac{2}{9}, \quad \|r(\mathbf{x})\|_2^2 = \frac{1}{6}$$

în sensul celor mai mici pătrate a sistemului (3).

Imaginea (range) matricei A este definită prin

$$\text{range}(A) = \{ \mathbf{y} \in \mathbb{R}^m; \mathbf{y} = a_1 A^1 + a_2 A^2 + \dots + a_n A^n, a_i \in \mathbb{R}, i = 1, n \},$$

unde $A^1, A^2, \dots, A^n \in \mathbb{R}^m$ sunt coloanele matricei A ,

$$A = [A^1 \quad A^2 \quad \dots \quad A^n] \in \mathbb{R}^{m \times n}.$$

Teorema celor mai mici pătrate

Teoremă

Fie $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, cu $m \geq n$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$. Un vector $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ minimizează norma euclidiană a vectorului reziduu

$$\|r(\mathbf{x})\|_2 = \|\mathbf{b} - A\mathbf{x}\|_2,$$

adică rezolvă problema (LSP), dacă și numai dacă:

$$r(\mathbf{x}) \perp \text{range}(A) \iff A^T r(\mathbf{x}) = 0.$$

sau echivalent cu:

$$A^T A \mathbf{x} = A^T \mathbf{b}. \tag{4}$$

Sistemul (4) poartă numele de sistemul de **ecuații normale**.

Sistemul (4) este un sistem pătratic de dimensiune n , cu matricea sistemului $A^T A$ simetrică.

Teorema celor mai mici pătrate

Sistemul de ecuații normale (4) este nesingular dacă și numai dacă $\text{rang } A = n$, în acest caz soluția \mathbf{x} a sistemului (4) este unică

$$\det A^T A \neq 0 \Leftrightarrow \text{rang } A = n.$$

Exemplu:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}, \quad A^T A = \begin{pmatrix} 14 & 32 \\ 32 & 77 \end{pmatrix}, \quad A^T \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{cases} 14x_1 + 32x_2 = 3 \\ 32x_1 + 77x_2 = 6 \end{cases} \Rightarrow x_1 = \frac{13}{18}, \quad x_2 = -\frac{2}{9}.$$

Pseudo-inversa matricei A

Presupunem că $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ are rangul egal cu numărul de coloane: $\text{rang}(A) = n$.

Atunci pseudo-inversa Moore–Penrose poate fi definită prin:

$$A^+ = (A^T A)^{-1} A^T \in \mathbb{R}^{n \times m}.$$

Exemplu:

Pentru exemplul precedent, se poate arăta că

$$A^+ = \begin{bmatrix} 14 & 32 \\ 32 & 77 \end{bmatrix}^{-1} * \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

Este $A^+ = A^l$?

Rezolvarea în sensul celor mai mici pătrate a unui sistem de ecuații liniare nepătratice

1. Folosind *factorizarea Cholesky* (descompunere LU) pentru matrice simetrice.

$$A^T A = LL^T,$$

unde $L \in \mathbb{R}^{n \times n}$ matrice inferior triunghiulară

Pași:

- Se calculează $A^T A$ și vectorul $A^T \mathbf{b}$;
- Se calculează factorizarea Cholesky a matricei $A^T A = LL^T$;
- Se rezolvă sistemul inferior triunghiular $L\mathbf{y} = A^T \mathbf{b}$ pentru \mathbf{y} ;
- Se rezolvă sistemul superior triunghiular $L^T \mathbf{x} = \mathbf{y}$ pentru \mathbf{x} ;

Rezolvarea în sensul celor mai mici pătrate a unui sistem de ecuații liniare nepătratice

2. Se calculează *descompunerea QR* (cu algoritmul lui Householder adaptat) pentru matricea A :

$$A = QR,$$

unde $Q \in \mathbb{R}^{m \times m}$ matrice ortogonală, iar $R \in \mathbb{R}^{m \times n}$, de forma

$$R = \begin{pmatrix} \bar{R} \in \mathbb{R}^{n \times n} \\ \mathbf{0}_{(m-n) \times n} \end{pmatrix},$$

cu \bar{R} - matrice superior triunghiulară.

- Se calculează factorizarea QR modificată a matricei A ;
- Se calculează vectorul $Q^T \mathbf{b}$;
- Se rezolvă sistemul triunghiular $\bar{R} \mathbf{x} = (Q^T \mathbf{b})_{i=1,n}$.

Rezolvarea în sensul celor mai mici pătrate a unui sistem de ecuații liniare nepătratice

3. Se folosește *descompunerea după valori singulare* a matricei A

$$A = U\Sigma V^T, \Sigma \in \mathbb{R}^{m \times n}, U \in \mathbb{R}^{m \times m}, V \in \mathbb{R}^{n \times n}.$$

- Se calculează SVD pentru matricea $A = U\Sigma V^T$;
- Se calculează vectorul $U^T \mathbf{b}$;
- Se rezolvă sistemul diagonal $\Sigma \mathbf{w} = U^T \mathbf{b}$ pentru \mathbf{w} ;
- Soluția este $\mathbf{x} = V \mathbf{w}$.

Observație: Dintre metodele **1.**, **2.** sau **3.**, se recomandă pentru utilizare metoda **3.**

Interpolare numerică

Interpolare numerică

Presupunem că despre o funcție f cunoaștem doar valorile într-un număr finit de puncte.

Pornind de la aceste date, dorim să aproximăm funcția f într-un alt punct.

x	x_0	x_1	x_2	\cdots	x_{n-1}	x_n
f	y_0	y_1	y_2	\cdots	y_{n-1}	y_n

În tabelul de mai sus

$$f(x_i) = y_i, \quad i = 0, 1, \dots, n, \text{ cu } x_i \neq x_j \text{ pentru } i \neq j.$$

Dat un punct $x \neq x_i, i = 0, \dots, n$, dorim să aproximăm $f(x)$ cunoscând cele $(n + 1)$ perechi $(x_i, y_i), i = 0, \dots, n$.

Punctele x_i se numesc **noduri de interpolare**.

Polinomul de interpolare Lagrange

Notăm cu Π_n mulțimea polinoamelor de grad cel mult n . Dimensiunea acestui spațiu este $n + 1$, baza uzuală fiind dată de polinoamele $1, x, x^2, \dots, x^n$.

Vom construi o altă bază în acest spațiu, formată din polinoamele p_i , definite prin:

$$p_i \in \Pi_n, \text{ astfel ca } p_i(x_j) = \begin{cases} 1, & \text{dacă } j = i, \\ 0, & \text{dacă } j \neq i, \end{cases}, \quad i, j = 0, 1, \dots, n.$$

Aceste polinoame formează baza Lagrange.

Construcția polinoamelor Lagrange

Din relația $p_i(x_j) = 0, \forall j \neq i$, și faptul că p_i este de grad n , rezultă că $x_0, x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n$ sunt cele n rădăcini ale polinomului p_i .

Rezultă că:

$$p_i(x) = c_i(x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \cdots (x - x_n),$$

unde $c_i \in \mathbb{R}, i = 0, \dots, n$.

Constanta c_i se determină din condiția: $p_i(x_i) = 1$.

Construcția polinoamelor Lagrange

Constanta c_i se determină din condiția: $p_i(x_i) = 1$.

$$p_i(x_i) = 1 = c_i(x_i - x_0)(x_i - x_1) \cdots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \cdots (x_i - x_n),$$

de unde rezultă

$$c_i = \frac{1}{(x_i - x_0)(x_i - x_1) \cdots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \cdots (x_i - x_n)}.$$

Polinoamele p_i au forma:

$$p_i(x) = \frac{(x - x_0) \cdots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \cdots (x - x_n)}{(x_i - x_0) \cdots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \cdots (x_i - x_n)} = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j},$$

unde $i = 0, \dots, n$.

Baza Lagrange

Propoziție

Polinoamele p_0, p_1, \dots, p_n formează o bază în Π_n .

Demonstrație: Vom arăta că cele $n + 1$ polinoame sunt liniar independente.

Deci p_0, p_1, \dots, p_n sunt liniar independente dacă

$$q(x) = a_0p_0(x) + a_1p_1(x) + \dots + a_np_n(x) = 0, \forall x$$

$$\Rightarrow a_0 = \dots = a_n = 0.$$

Baza Lagrange

Demonstrație: (continuare)

Vom face pe rând $x = x_0, x = x_1, \dots, x = x_n$ în polinomul q :

$$\begin{aligned}x = x_0 : \quad q(x_0) &= a_0 p_0(x_0) + a_1 p_1(x_0) + \dots + a_n p_n(x_0) \\ &= a_0 \mathbf{1} + a_1 \mathbf{0} + \dots + a_n \mathbf{0} = a_0 = 0 \Rightarrow a_0 = 0.\end{aligned}$$

$$x = x_1 : \quad q(x_1) = 0 \Rightarrow a_1 = 0.$$

\vdots

$$\begin{aligned}x = x_k : \quad q(x_k) &= a_0 p_0(x_k) + \dots + a_k p_k(x_k) + \dots + a_n p_n(x_k) \\ &= a_0 \mathbf{0} + \dots + a_k \mathbf{1} + \dots + a_n \mathbf{0} \Rightarrow a_k = 0.\end{aligned}$$

$$x = x_n \quad q(x_n) = 0 \Rightarrow a_n = 0.$$

Toate constantele a_i sunt nule deci polinoamele $\{p_i; i = 0, \dots, n\}$ formează o bază în Π_n . □

Construirea polinomului de interpolare

Pentru a aproxima funcția f , pornind de la tabelul de mai sus, vom construi un polinom $l_n \in \Pi_n$ astfel încât să satisfacă **condițiile de interpolare**

$$l_n \in \Pi_n, l_n(x_i) = y_i, \quad i = 0, 1, \dots, n. \quad (5)$$

Odată construit acest polinom, vom aproxima $f(x)$ prin $l_n(x)$, $f(x) \approx l_n(x)$.

Vom scrie polinomul l_n în raport cu noua bază Lagrange $\{p_i; i = 0, \dots, n\}$, deci există constantele reale a_0, a_1, \dots, a_n astfel ca

$$l_n(x) = \sum_{i=0}^n a_i p_i(x).$$

Construirea polinomului de interpolare

Așadar, constantele a_k se determină astfel:

$$\begin{aligned}y_k &= \ell_n(x_k) = a_0 p_0(x_k) + \dots + a_k p_k(x_k) + \dots + a_n p_n(x_k) \\ &= a_0 0 + \dots + a_k 1 + \dots + a_n 0 = a_k \Rightarrow a_k = y_k.\end{aligned}$$

Prin urmare un polinom de grad n care îndeplinesc condițiile de interpolare (5) este:

$$\begin{aligned}\ell_n(x) &= \sum_{i=0}^n y_i p_i(x) \\ &= \sum_{i=0}^n y_i \frac{(x - x_0) \cdots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \cdots (x - x_n)}{(x_i - x_0) \cdots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \cdots (x_i - x_n)}\end{aligned}$$

Construirea polinomului de interpolare

Așadar, avem

$$\ell_n(x) = \sum_{i=0}^n y_i \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \quad (6)$$

Polinomul din formula (6) se numește **polinomul de interpolare Lagrange**.

Polinomul de interpolare Lagrange

Propoziție

Polinomul ℓ_n dat de formula (6) este **unicul** polinom de grad n care îndeplinește condițiile de interpolare (5).

Demonstrație: Presupunem că mai există un polinom $q \in \Pi_n$ care îndeplinește condițiile (5), adică

$$q \in \Pi_n, q(x_i) = y_i, \quad \forall i = 0, \dots, n.$$

Fie polinomul $p(x) = \ell_n(x) - q(x) \in \Pi_n$.

Atunci, pentru orice $k = 0, 1, \dots, n$, avem:

$$p(x_k) = \ell_n(x_k) - q(x_k) = y_k - y_k = 0.$$

Deci polinomul p are ca rădăcini toate nodurile de interpolare.

Polinomul de interpolare Lagrange

Demonstrație:(continuare)

Polinomul p este polinom de grad cel mult n și are $(n + 1)$ rădăcini distincte ($x_i \neq x_j, \forall i \neq j$). Acest polinom nu poate fi decât polinomul identic nul, adică

$$p(x) = \ell_n(x) - q(x) \equiv 0, \forall x, \ell_n(x) = q(x), \forall x.$$

Deci polinomul ℓ_n este unicul care satisface (5). □

Polinomul nodurilor de interpolare

Fie w_{n+1} polinomul de grad $n + 1$ care are ca rădăcini nodurile de interpolare:

$$w_{n+1}(x) = (x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_n) \in \Pi_{n+1}.$$

Fie $a = \min\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$, $b = \max\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$.

Teorema restului(eroarea la interpolare)

Fie $f \in C^{n+1}[a, b]$ și $\bar{x} \in [a, b]$, $\bar{x} \neq x_i, \forall i = 0, \dots, n$.

Atunci există un punct $y \in [a, b]$, $y = y(x_0, x_1, \dots, x_n, \bar{x})$

(punctul y depinde de nodurile de interpolare x_i și de punctul \bar{x})
astfel încât eroarea la interpolarea numerică este dată de:

$$f(\bar{x}) - \ell_n(\bar{x}) = \frac{f^{(n+1)}(y)}{(n+1)!} w_{n+1}(\bar{x}). \quad (7)$$

Polinomul nodurilor de interpolare

Demonstrație: Considerăm funcția F :

$$F(x) := f(x) - \ell_n(x) - cw_{n+1}(x).$$

Constanta reală c este aleasă astfel ca $F(\bar{x})$ adică:

$$c = \frac{f(\bar{x}) - \ell_n(\bar{x})}{w_{n+1}(\bar{x})}, (x \neq x_i, \forall i) \Rightarrow w_{n+1}(\bar{x}) \neq 0. \quad (8)$$

Funcția f fiind de clasă C^{n+1} pe intervalul $[a, b]$ rezultă că și funcția F este din $C^{n+1}[a, b]$.

Avem:

$$F(x_i) = f(x_i) - \ell_n(x_i) - cw_{n+1}(x_i) = y_i - y_i - c \cdot 0 = 0, \forall i = 0, \dots, n.$$

Polinomul nodurilor de interpolare

Demonstrație: (continua) Funcția auxiliară F are $(n + 2)$ zerouri, $x_0, x_1, \dots, x_n, \bar{x}$. Aplicând succesiv Teorema lui Rolle rezultă că F' are $n + 1$ zerouri, F'' are n zerouri, ..., $F^{(n+1)}$ are 1 zero în intervalul $[a, b]$. Vom nota această rădăcină a lui $F^{(n+1)}$ cu y .

Punctul y depinde de zerourile inițiale $x_0, x_1, \dots, x_n, \bar{x}$ și

$$y = y(x_0, x_1, \dots, x_n, \bar{x}) \in [a, b] \text{ a. î. } F^{(n+1)}(y) = 0. \quad (9)$$

Polinomul nodurilor de interpolare

Demonstrație: (continua) Derivata de ordinul $(n + 1)$ a funcției F se calculează astfel

$$\begin{aligned} F^{(n+1)}(x) &= f^{(n+1)}(x) - \ell_n^{(n+1)}(x) - c w_{n+1}^{(n+1)}(x) \\ &= f^{(n+1)}(x) - 0 - c(n+1)! = f^{(n+1)}(x) - c(n+1)! \end{aligned} \tag{10}$$

(derivata de ordin $(n + 1)$ a polinomului de grad n , ℓ_n , este 0).

Din relațiile (8),(9) și (10) rezultă că

$$c = \frac{f^{(n+1)}(y)}{(n+1)!} = \frac{f(\bar{x}) - \ell_n(\bar{x})}{w_{n+1}(\bar{x})} \Rightarrow f(\bar{x}) - \ell_n(\bar{x}) = \frac{f^{(n+1)}(y)}{(n+1)!} w_{n+1}(\bar{x}).$$

Forma Newton a polinomului de interpolare Lagrange

Propoziție

Fie $\ell_{k-1}(x, x_0, x_1, \dots, x_{k-1}, f), \ell_{k-1}(x, x_1, \dots, x_k, f) \in \Pi_{k-1}$ polinoamele de interpolare Lagrange pentru funcția f pe sistemul de noduri $\{x_0, x_1, \dots, x_{k-1}\}$, și, respectiv pe sistemul $\{x_1, x_2, \dots, x_k\}$.

Atunci

$$\begin{aligned} & \ell_k(x, x_0, x_1, \dots, x_k, f) \\ &= \frac{(x - x_0)\ell_{k-1}(x, x_1, \dots, x_k, f) - (x - x_k)\ell_{k-1}(x, x_0, \dots, x_{k-1}, f)}{x_k - x_0} \end{aligned}$$

Demonstrație: Se lasă ca exercițiu.

Forma Newton a polinomului de interpolare Lagrange

Considerăm următoarele probleme de interpolare:

$$\{(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_{k-1}, y_{k-1})\} \rightarrow \ell_{k-1}(x, x_0, x_1, \dots, x_{k-1}, f)$$

$$\{(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_k, y_k)\} \rightarrow \ell_k(x, x_0, x_1, \dots, x_k, f)$$

Ne interesează să găsim o formulă de trecere rapidă de la polinomul de interpolare pe k noduri la cel care are un nod în plus.

Forma Newton a polinomului de interpolare Lagrange

Deoarece polinomul de grad cel mult k :

$$q(x) = \ell_k(x, x_0, x_1, \dots, x_k, f) - \ell_{k-1}(x, x_0, x_1, \dots, x_{k-1}, f) \in \Pi_k.$$

are ca rădăcini punctele x_0, x_1, \dots, x_{k-1} ,

($q(x_i) = y_i - y_i = 0, i = 0, \dots, k-1$) avem relația

$$\ell_k(x, x_0, x_1, \dots, x_k, f) = \ell_{k-1}(x, x_0, x_1, \dots, x_{k-1}, f) + A \prod_{j=0}^{k-1} (x - x_j) \quad (11)$$

în care A este dat de relația

$$A = \frac{\ell_k(x_k, x_0, x_1, \dots, x_k, f) - \ell_{k-1}(x_k, x_0, x_1, \dots, x_{k-1}, f)}{\prod_{j=0}^{k-1} (x_k - x_j)} \quad (12)$$

Forma Newton a polinomului de interpolare Lagrange

Relația (12) se mai poate scrie astfel

$$\begin{aligned} A &= \frac{y_k}{\prod_{j=0}^{k-1} (x_k - x_j)} - \frac{\sum_{i=0}^{k-1} y_i \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{k-1} \frac{x_k - x_j}{x_i - x_j}}{\prod_{j=0}^{k-1} (x_k - x_j)} \\ &= \frac{y_k}{\prod_{j=0}^{k-1} (x_k - x_j)} - \sum_{i=0}^{k-1} \frac{y_i}{(x_k - x_i) \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{k-1} (x_i - x_j)} \end{aligned}$$

Forma Newton a polinomului de interpolare Lagrange

Așadar,

$$A_k = \sum_{i=0}^k \frac{y_i}{\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^k (x_i - x_j)}. \quad (13)$$

Dacă definim :

$$[x_k]_f = y_k = f(x_k),$$

atunci

$$[x_0, x_1, \dots, x_k]_f = \frac{[x_1, x_2, \dots, x_k]_f - [x_0, x_1, \dots, x_{k-1}]_f}{x_k - x_0},$$

se numește **diferență divizată de ordin k** a funcției f pe nodurile $\{x_0, x_1, \dots, x_k\}$.

Forma Newton a polinomului de interpolare Lagrange

Propoziție

Pentru orice sistem de noduri $\{x_0, x_1, \dots, x_k\}$ și orice k are loc

$$[x_0, x_1, \dots, x_k]_f = \sum_{i=0}^k \frac{y_i}{\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^k (x_i - x_j)} = \sum_{i=0}^k \frac{y_i}{(w_{n+1}(x_k))'}. \quad (14)$$

Demonstrație: Se face prin inducție. Pentru $k = 1$ avem:

$$[x_0, x_1]_f = \frac{y_0}{x_0 - x_1} + \frac{y_1}{x_1 - x_0} = \frac{[x_1]_f - [x_0]_f}{x_1 - x_0}.$$

Forma Newton a polinomului de interpolare Lagrange

Demonstrație(continuare):

Presupunem că relația (14) este adevărată pentru orice k și pentru orice sistem de noduri $\{x_0, x_1, \dots, x_k\}$.

Pentru $k + 1$ folosim relația de recurență și apoi aplicăm ipoteza inductivă:

$$\begin{aligned} [x_0, x_1, \dots, x_{k+1}]_f &= \frac{[x_1, x_1, \dots, x_{k+1}]_f - [x_0, x_2, \dots, x_k]_f}{x_{k+1} - x_0} \\ &= \frac{1}{x_{k+1} - x_0} \left(\sum_{i=1}^{k+1} \frac{y_i}{\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{k+1} (x_i - x_j)} - \sum_{i=1}^k \frac{y_i}{\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{k+1} (x_i - x_j)} \right) \end{aligned}$$

Forma Newton a polinomului de interpolare Lagrange

Demonstrație(continuare):

Deci

$$\begin{aligned} [x_0, x_1, \dots, x_{k+1}]f &= \frac{1}{x_{k+1} - x_0} \left\{ -\frac{y_0}{\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq 0}}^k (x_0 - x_j)} + \frac{y_{k+1}}{\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k+1}}^{k+1} (x_{k+1} - x_j)} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{i=1}^k \left[\frac{y_i}{\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^k (x_i - x_j)} \left(\frac{1}{x_i - x_{k+1}} - \frac{1}{x_i - x_0} \right) \right] \right\} \end{aligned}$$

Forma Newton a polinomului de interpolare Lagrange

Demonstrație(continuare): Sau, mai simplu

$$\begin{aligned} [x_0, \dots, x_{k+1}]_f &= \frac{y_0}{\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq 0}}^k (x_0 - x_j)} + \frac{y_{k+1}}{\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k+1}}^{k+1} (x_{k+1} - x_j)} + \sum_{i=1}^k \frac{y_i}{\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{k+1} (x_i - x_j)} \\ &= \sum_{i=0}^{k+1} \frac{y_i}{\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{k+1} (x_i - x_j)} \end{aligned}$$

Așadar, prin inducție, relația (14) este adevărată pentru orice k .

Forma Newton a polinomului de interpolare Lagrange

Din definiție se observă că diferența divizată

$[x_0, x_1, \dots, x_k]_f$ nu depinde de ordinea nodurilor $\{x_0, x_1, \dots, x_k\}$.

Vom nota în continuare cu $\ell_k(x)$ polinomul de interpolare Lagrange pe nodurile $\{x_0, x_1, \dots, x_k\}$ pentru funcția f .

$$\begin{aligned}\ell_k(x) &= \ell_0(x) + [\ell_1(x) - \ell_0(x)] + \dots + [\ell_k(x) - \ell_{k-1}(x)] + \dots + [\ell_n(x) - \ell_{n-1}(x)] \\ &= y_0 + [x_0, x_1]_f(x - x_0) + \dots + [x_0, x_1, \dots, x_k]_f(x - x_0) \cdot \dots \cdot (x - x_{k-1}) \\ &\quad + \dots + [x_0, x_1, \dots, x_n]_f(x - x_0) \cdot \dots \cdot (x - x_{n-1}).\end{aligned}$$

Forma Newton a polinomului de interpolare Lagrange

Prin urmare, *forma Newton a polinomului de interpolare Lagrange* este dată de

$$\begin{aligned} \ell_n(x) = & y_0 + [x_0, x_1]_f(x - x_0) + [x_0, x_1, x_2]_f(x - x_0)(x - x_1) + \\ & + [x_0, x_1, \dots, x_n]_f(x - x_0) \cdot \dots \cdot (x - x_{n-1}). \end{aligned}$$

Schema Aitken de calcul al diferențelor divizate

În cele ce urmează, ne propunem să calculăm diferențele divizate

$$[x_0, x_1]_f, [x_0, x_1, x_2]_f, \dots, [x_0, x_1, \dots, x_n]_f$$

necesare construirii polinomului de interpolare Lagrange în forma Newton.

Procedeul folosește definiția recursivă a diferențelor divizate și se desfășoară în n pași.

Schema Aitken de calcul al diferențelor divizate

La pasul 1 se calculează numai diferențe divizate de ordinul 1:

$$[x_0, x_1]_f, [x_1, x_2]_f, \dots, [x_{n-1}, x_n]_f$$

În general, la pasul k se calculează diferențe divizate de ordin k :

$$[x_0, x_1, \dots, x_k]_f, [x_1, x_2, \dots, x_{k+1}]_f, \dots, [x_{n-k}, x_{n-k+1}, \dots, x_n]_f$$

La pasul n se calculează o singură diferență divizată de ordin n și anume

$$[x_0, x_1, \dots, x_n]_f.$$

Schema Aitken de calcul al diferențelor divizate

		Pas 1	...	Pas k	...	Pas n
x_0	y_0					
x_1	y_1	$[x_0, x_1]_f$				
x_2	y_2	$[x_1, x_2]_f$				
\vdots						
x_k	y_k	$[x_{k-1}, x_k]_f$		$[x_0, x_1, \dots, x_k]_f$		
\vdots				\vdots	\ddots	
x_{n-1}	y_{n-1}	$[x_{n-2}, x_{n-1}]_f$		$[x_{n-k-1}, \dots, x_{n-1}]_f$		
x_n	y_n	$[x_{n-1}, x_n]_f$		$[x_{n-k}, \dots, x_{n-1}]_f$		$[x_0, x_1, \dots, x_n]_f$

Schema Aitken de calcul al diferențelor divizate

Notăm cu

$$dd[i, k] := [x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+k}]_f$$

diferența divizată de ordin k , pe nodurile consecutive $\{x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+k}\}$, cu $i = 0, \dots, n - k$, $k = 1, \dots, n$, având $dd[i, 0] = y_i$, $i = 0, \dots, n$.

Schema lui Aitken se implementează astfel

$$dd[i, 0] = y_i, \quad i = 0, \dots, n;$$

for $k = 1, \dots, n$

for $i = 0, \dots, n - k$

$$dd[i, k] = \frac{dd[i + 1, k - 1] - dd[i, k - 1]}{x_{i+k} - x_i}.$$

Schema Aitken de calcul al diferențelor divizate

Putem face aceleași calcule folosind un singur vector, de exemplu rescriind vectorul y astfel:

for $k = 1, \dots, n$

for $i = n, \dots, k$

$$y_i = \frac{y_i - y_{i-1}}{x_i - x_{i-k}}.$$

La finalul acestei secvențe de program, vectorul y va conține elementele:

$$y_0, [x_0, x_1]_f, [x_0, x_1, x_2]_f, \dots, [x_0, x_1, \dots, x_n]_f$$

$$(y_k = [x_0, x_1, \dots, x_k]_f, k = 0, \dots, n).$$