

# Calcul Numeric

## Curs 5

A decorative horizontal band consisting of multiple overlapping, wavy, semi-transparent orange lines that create a sense of motion and depth across the middle of the slide.

Conf. dr. Anca Ignat

Conf. dr. Andreea Arusoaie

March 23, 2026

# Descompunerea Cholesky

## Definiție

O matrice  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  se numește **pozitiv definită** dacă:

$$(A\mathbf{x}, \mathbf{x})_{\mathbb{R}^n} > 0, \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \quad \mathbf{x} \neq 0$$

sau, echivalent

$$\mathbf{x}^T A \mathbf{x} > 0, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \quad \mathbf{x} \neq 0$$

**Notăție:**  $A > 0$

# Descompunerea Cholesky

Fie  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  o matrice *simetrică* ( $A = A^T$ ) și *pozitiv definită* ( $A > 0$ ).

*Descompunerea Cholesky* pentru matricea  $A$  este de forma:

$$A = L \cdot L^T \quad (1)$$

unde  $L \in \mathbb{R}^{n \times n}$  este o *matrice inferior triunghiulară*, de forma

$$L = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & l_{nn} \end{pmatrix}$$

# Descompunerea Cholesky

Așadar, descompunerea Cholesky este de forma

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}}_A = \underbrace{\begin{pmatrix} l_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & l_{nn} \end{pmatrix}}_L \underbrace{\begin{pmatrix} l_{11} & l_{21} & \cdots & l_{n1} \\ 0 & l_{22} & \cdots & l_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & l_{nn} \end{pmatrix}}_{L^T}$$

unde matricea  $L$  se calculează în  $n$  pași, coloană după coloană.

# Descompunerea Cholesky - Pasul $r$

## Pasul $r$ ( $r = 1, \dots, n$ )

Se calculează elementele coloanei  $r$  a matricei  $L$ :

- întâi elementul diagonal  $l_{rr}$
- celelalte elemente  $l_{ir}$  ( $i = r + 1, \dots, n$ ).

Coloana  $r$  a matricei  $L$ :

$$(0 \quad \dots \quad 0 \quad l_{rr} \quad l_{r+1r} \quad \dots \quad l_{ir} \quad \dots \quad l_{nr})^T$$

La acest pas, se cunosc elementele primelor  $(r - 1)$  coloane ale matricei  $L$ .

# Descompunerea Cholesky - Pasul $r$

Calculul elementelor  $l_{rr}$ :

$$a_{rr} = (LL^T)_{rr} = (l_{r1} \quad \cdots \quad l_{rr-1} \quad l_{rr} \quad 0 \quad \cdots \quad 0) \begin{pmatrix} l_{r1} \\ \vdots \\ l_{rr-1} \\ l_{rr} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= l_{r1}^2 + l_{r2}^2 + \cdots + l_{rr-1}^2 + l_{rr}^2 = \sum_{k=1}^{r-1} l_{rk}^2 + l_{rr}^2$$

Prin urmare, avem

$$l_{rr} = \pm \sqrt{a_{rr} - \sum_{k=1}^{r-1} l_{rk}^2}.$$

# Descompunerea Cholesky - Pasul $r$

Calculul elementelor  $l_{ir}$  ( $i = r + 1, \dots, n$ ):

$$a_{ir} = (LL^T)_{ir} = \begin{pmatrix} l_{i1} & l_{i2} & \cdots & l_{i,r-1} & l_{ir} & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_{r1} \\ l_{r2} \\ \vdots \\ l_{r,r-1} \\ l_{rr} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$= l_{i1}l_{r1} + l_{i2}l_{r2} + \cdots + l_{i,r-1}l_{r,r-1} + l_{ir}l_{rr} = \sum_{k=1}^{r-1} l_{ik}l_{rk} + l_{ir}l_{rr}$$

$$l_{ir} = \frac{\left( a_{ir} - \sum_{k=1}^{r-1} l_{ik}l_{rk} \right)}{l_{rr}}$$

# Factorizarea Cholesky - Numărul de operații

**A** (adunări, scăderi):

$$\sum_{r=1}^n (n - r + 1)(r - 1) = \frac{n(n - 1)(n + 1)}{6} = \frac{n^3}{6} + O(n^2)$$

**M** (înmulțiri, împărțiri):

$$\sum_{r=1}^n [(n - r)r + (r - 1)] = \frac{n(n + 4)(n - 1)}{6} = \frac{n^3}{6} + O(n^2).$$

# Algoritmul de eliminare Gauss fără schimbare de ecuații - Descompunere LU

Presupunem că la fiecare pas al algoritmului de eliminare Gauss, pivotul este nenul,  $a_{rr}^{(r-1)} \neq 0$ , deci nu este nevoie de schimbare de ecuații.

Algoritmul se poate scrie astfel:

```
for  $r = 1, \dots, n - 1$  do  
  for  $i = r + 1, \dots, n$  do  
     $f = -\frac{a_{ir}}{a_{rr}}$   
    //  $E_i = E_i + f * E_r$   
    for  $j = r + 1, \dots, n$  do  
       $a_{ij} = a_{ij} + f * a_{rj}$   
    end for  
     $a_{ir} = 0$   
     $b_i = b_i + f * b_r$   
  end for  
end for
```

# Descompunerea LU - Vectorul și matricea de eliminare

Considerăm vectorul  $t^{(r)} \in \mathbb{R}^n$  și matricea  $T^{(r)} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  :

$$t^{(r)} := \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ t_{r+1}^{(r)} \\ \vdots \\ t_n^{(r)} \end{pmatrix} \quad T^{(r)} := I_n + t^{(r)} e_r^T$$

# Descompunerea LU - Vectorul și matricea de eliminare

$$t^{(r)}e_r^T = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ t_{r+1}^{(r)} \\ \vdots \\ t_n^{(r)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \overset{col\ r}{0} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & t_{r+1}^{(r)} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & t_n^{(r)} & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \text{-linia } r+1$$

# Descompunerea LU

Matricea  $T_r$  este matrice triunghiulară inferior cu 1 pe diagonala principală:

$$T^{(r)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \overset{\text{col } r}{0} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & t_{r+1}^{(r)} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & t_n^{(r)} & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

# Descompunerea LU - Inversa matricei $T_r$

Inversa matricei  $T_r$  este:

$$T_r^{-1} = I_n - t^{(r)} e_r^T$$

*Verificare:*

$$\begin{aligned} T_r \cdot T_r^{-1} &= \left( I_n + t^{(r)} e_r^T \right) \left( I_n - t^{(r)} e_r^T \right) \\ &= I_n - t^{(r)} e_r^T + t^{(r)} e_r^T - t^{(r)} e_r^T t^{(r)} e_r^T \\ &= I_n - t^{(r)} \underbrace{e_r^T t^{(r)}}_{=0} e_r^T = I_n \end{aligned}$$

Dacă  $A$  este o matrice oarecare, vrem să vedem cum se poate construi matricea  $B = T_r \cdot A$  fără a face înmulțire matricială.

# Descompunerea LU

Vom studia legătura între liniile matricelor  $A$  și  $B$ .

$$\begin{aligned}e_i^T B &= e_i^T (T_r A) = e_i^T \left( I_n + t^{(r)} e_r^T \right) A = e_i^T A + e_i^T t^{(r)} e_r^T A \\ &= e_i^T A + t_i^{(r)} (e_r^T A)\end{aligned}$$

Linia  $i$  a noii matrice  $B$  se obține din linia  $i$  a matricei  $A$  la care se adaugă linia  $r$  a matricei  $A$  înmulțită cu factorul  $t_i^{(r)}$ .

$$e_i^T B = \begin{cases} e_i^T A & i = 1, \dots, r \quad \left( t_i^{(r)} = 0 \right) \\ e_i^T A + t_i^{(r)} e_r^T A & i = r + 1, \dots, n \end{cases}.$$

## Descompunerea LU - Pasul $r$ al eliminării Gauss

Operația  $T_r A$  descrie *Pasul  $r$*  al algoritmului de eliminare Gauss dacă:

$$t_{r+1}^{(r)} = -\frac{a_{r+1r}^{(r)}}{a_{rr}^{(r)}}, \quad \dots, \quad t_i^{(r)} = -\frac{a_{ir}^{(r)}}{a_{rr}^{(r)}}, \quad \dots, \quad t_n^{(r)} = -\frac{a_{nr}^{(r)}}{a_{rr}^{(r)}}.$$

Algoritmul de eliminare Gauss fără schimbare de ecuații poate fi descris astfel:

$$T_{n-1} \cdots T_2 T_1 A = U \quad \text{cu} \quad T_r = I_n + t^{(r)} e_r^T$$

$$t^{(r)} = \left( 0 \quad \dots \quad 0 \quad -\frac{a_{r+1r}^{(r)}}{a_{rr}^{(r)}} \quad \dots \quad -\frac{a_{ir}^{(r)}}{a_{rr}^{(r)}} \quad \dots \quad \frac{a_{nr}^{(r)}}{a_{rr}^{(r)}} \right)^T.$$

# Descompunerea LU - Construcția matricei $L$

Avem:

$$A = T_1^{-1}T_2^{-1} \cdots T_{n-1}^{-1}U = L \cdot U,$$

unde  $L := T_1^{-1}T_2^{-1} \cdots T_{n-1}^{-1}$ .

$$\begin{aligned}T_1^{-1}T_2^{-1} &= \left(I_n - t^{(1)}e_1^T\right) \left(I_n - t^{(2)}e_2^T\right) \\&= I_n - t^{(1)}e_1^T - t^{(2)}e_2^T + t^{(1)}e_1^T t^{(2)}e_2^T \\&= I_n - t^{(1)}e_1^T - t^{(2)}e_2^T + t^{(1)}t_1^{(2)}e_2^T \\&= I_n - t^{(1)}e_1^T - t^{(2)}e_2^T \quad (t_1^{(2)} = 0)\end{aligned}$$

# Descompunerea LU - Construcția matricei $L$

Prin inducție se arată că:

$$L = T_1^{-1}T_2^{-1} \cdots T_{n-1}^{-1} = I_n - t^{(1)}e_1^T - t^{(2)}e_2^T - \cdots - t^{(n-1)}e_{n-1}^T$$

$$L = I_n - \sum_{r=1}^{n-1} t^{(r)}e_r^T.$$

# Descompunerea LU - Construcția matricei $L$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{a_{21}}{a_{11}} & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{a_{31}}{a_{11}} & \frac{a_{32}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{a_{r1}}{a_{11}} & \frac{a_{r2}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \frac{a_{r+11}}{a_{11}} & \frac{a_{r+12}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} & \cdots & \frac{a_{r+1r}^{(r-1)}}{a_{rr}^{(r-1)}} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots & 0 \\ \frac{a_{n1}}{a_{11}} & \frac{a_{n2}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} & \cdots & \frac{a_{nr}^{(r-1)}}{a_{rr}^{(r-1)}} & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

# Matrici ortogonale

## Definiție:

Se numește **matrice ortogonală** o matrice  $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$  care satisface relația:

$$Q^T Q = Q Q^T = I_n \quad (Q^{-1} = Q^T)$$

Matricile ortogonale au următoarele proprietăți:

- Dacă  $Q$  este matrice ortogonală, atunci și matricea transpusă  $Q^T$  este ortogonală:

$$(Q^T)^T Q^T = Q Q^T = I_n \quad \text{și} \quad Q^T (Q^T)^T = Q^T Q = I_n$$

# Matrici ortogonale - Proprietăți

- Dacă  $Q_1$  și  $Q_2$  sunt matrice ortogonale, atunci  $Q_1Q_2$  este tot matrice ortogonală:

$$(Q_1Q_2)^T (Q_1Q_2) = Q_2^T Q_1^T Q_1 Q_2 = Q_2^T I_n Q_2 = Q_2^T Q_2 = I_n$$

$$(Q_1Q_2) (Q_1Q_2)^T = Q_1 Q_2 Q_2^T Q_1^T = Q_1 I_n Q_1^T = Q_1 Q_1^T = I_n$$

- Dacă  $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$  este matrice ortogonală și  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ , atunci:

$$\|Q\mathbf{x}\|_2 = \|\mathbf{x}\|_2.$$

*Demonstrație:*

$$\|Q\mathbf{x}\|_2^2 = (Q\mathbf{x}, Q\mathbf{x})_{\mathbb{R}^n} = (\mathbf{x}, Q^T Q\mathbf{x})_{\mathbb{R}^n} = (\mathbf{x}, \mathbf{x})_{\mathbb{R}^n} = \|\mathbf{x}\|_2^2, \|\cdot\| \geq 0$$

$$\Rightarrow \|Q\mathbf{x}\|_2 = \|\mathbf{x}\|_2.$$

# Descompuneri QR - Definiție

Fie  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  o matrice reală pătratică. Presupunem că avem:

$$A = QR$$

unde  $Q$  este o matrice ortogonală iar  $R$  este o matrice superior triunghiulară.

Atunci:

$$Ax = \mathbf{b} \Leftrightarrow QRx = \mathbf{b} \Leftrightarrow Q^T QRx = Q^T \mathbf{b} \Leftrightarrow Rx = Q^T \mathbf{b}$$

.