

Calcul Numeric

Curs 4

A decorative horizontal band consisting of multiple overlapping, wavy, semi-transparent orange lines that create a sense of motion and depth across the middle of the slide.

Conf. dr. Anca Ignat

Conf. dr. Andreea Arusoaie

March 8, 2026

Metode numerice de rezolvarea sistemelor liniare

Fie $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ o matrice nesingulară și fie $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$.

Cum $\det A \neq 0$, știm că sistemul liniar

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

admite soluție unică.

O metodă de a determina soluția sistemului este *regula lui Cramer*:

$$x_i = \frac{\det A_i(\mathbf{b})}{\det A}, \quad i = 1, \dots, n,$$

unde $A_i(\mathbf{b})$ este matricea obținută din A prin înlocuirea coloanei i cu vectorul \mathbf{b} .

Metode numerice de rezolvarea sistemelor liniare

Algoritmul bazat pe regula lui Cramer este foarte *costisitor* din punct de vedere al resurselor și *instabil numeric*.

Din aceste motive s-au căutat metode mai eficiente pentru determinarea soluției \mathbf{x} .

Unul dintre cei mai utilizați algoritmi este **algoritmul de eliminare Gauss**:

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} \iff \tilde{A}\mathbf{x} = \tilde{\mathbf{b}},$$

cu \tilde{A} matrice superior triunghiulară. Așadar avem

$$\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b} = \tilde{A}^{-1}\tilde{\mathbf{b}}$$

notăm $A\mathbf{x} = \mathbf{b} \sim \tilde{A}\mathbf{x} = \tilde{\mathbf{b}}$.

Eliminare Gauss-Cramer-Exemplu

```
D:\cn info3 2025-2026 sem ii' x + v
n = 10
Eliminarea Gauss
2/25/2026 3:28:50 PM
Timp in milisecunde (eliminare Gauss) 0
2/25/2026 3:28:50 PM

Eroarea |Ax-b| = 9.76807000777586E-15

Eroarea |x-x_exact| = 3.03945801356075E-14

Solutia exacta : 1,2, ...

Regula lui Cramer
2/25/2026 3:28:50 PM
Timp in milisecunde (Cramer) 1712
2/25/2026 3:28:52 PM

Eroarea |Ax-b| = 3.91022088199198E-12

Eroarea |x-x_exact| = 4.13391277540063E-12
```

Eliminare Gauss-Cramer-Exemplu

```
n = 11
```

```
Eliminarea Gauss
```

```
2/25/2026 3:29:48 PM
```

```
Timp in milisecunde (eliminare Gauss) 0
```

```
2/25/2026 3:29:48 PM
```

```
Eroarea  $|Ax-b| = 1.48919979676391E-14$ 
```

```
Eroarea  $|x-x_{\text{exact}}| = 7.65771584816258E-14$ 
```

```
Solutia exacta : 1,2, ...
```

```
Regula lui Cramer
```

```
2/25/2026 3:29:48 PM
```

```
Timp in milisecunde (Cramer) 21274
```

```
2/25/2026 3:30:09 PM
```

```
Eroarea  $|Ax-b| = 4.71741967687147E-11$ 
```

```
Eroarea  $|x-x_{\text{exact}}| = 5.17211551717548E-11$ 
```

Eliminare Gauss-Cramer-Exemplu

```
D:\cn info3 2025-2026 sem ii × + v
n = 12

Eliminarea Gauss
2/25/2026 3:30:55 PM
Timp in milisecunde (eliminare Gauss) 0
2/25/2026 3:30:55 PM

Eroarea |Ax-b| = 1.97430152289006E-14

Eroarea |x-x_exact| = 1.4552042486394E-13

Solutia exacta : 1,2, ...

Regula lui Cramer
2/25/2026 3:30:55 PM
Timp in milisecunde (Cramer) 329717
2/25/2026 3:36:25 PM

Eroarea |Ax-b| = 1.59207372964179E-09

Eroarea |x-x_exact| = 6.95892843824402E-10
```

Eliminare Gauss-Cramer-Exemplu

```
D:\cn info3 2025-2026 sem ii x + v
n = 13
Eliminarea Gauss
2/28/2026 12:34:36 PM
Timp in milisecunde (eliminare Gauss) 0
2/28/2026 12:34:36 PM

Eroarea |Ax-b| = 2.62991658537712E-14

Eroarea |x-x_exact| = 1.2480397342819E-13

Solutia exacta : 1,2, ...

Regula lui Cramer
2/28/2026 12:34:36 PM
Timp in milisecunde (Cramer) 11338760
2/28/2026 3:43:35 PM

Eroarea |Ax-b| = 3.81156888226675E-09

Eroarea |x-x_exact| = 3.18431013208037E-09
```

Eliminare Gauss-Cramer-Exemplu

```
n = 14
```

```
Eliminarea Gauss
```

```
2/28/2026 4:39:31 PM
```

```
  Timp in milisecunde (eliminare Gauss) 0
```

```
2/28/2026 4:39:31 PM
```

```
Eroarea  $|Ax-b| = 3.29891334011514E-14$ 
```

```
Eroarea  $|x-x_{exact}| = 3.21086152927243E-14$ 
```

```
Solutia exacta : 1,2, ...
```

```
Regula lui Cramer
```

```
2/28/2026 4:39:31 PM
```

```
  Timp in milisecunde (Cramer) 95010871
```

```
3/1/2026 7:02:40 PM
```

```
Eroarea  $|Ax-b| = 2.22855900599253E-08$ 
```

```
Eroarea  $|x-x_{exact}| = 1.75011188561006E-08$ 
```

Eliminare Gauss-Cramer-Exemplu

```
n = 10000
```

```
Eliminarea Gauss
```

```
2/28/2026 4:06:41 PM
```

```
Timp in milisecunde (eliminare Gauss) 1880891
```

```
2/28/2026 4:38:02 PM
```

```
Eroarea  $|Ax-b| = 3.11453626266408E-05$ 
```

```
Eroarea  $|x-x_{\text{exact}}| = 9.71707279937199E-06$ 
```

```
Solutia exacta : 1,2, ...
```

```
Regula lui Cramer
```

```
2/28/2026 4:38:02 PM
```

Metoda substituției

Fie sistemul liniar

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b},$$

unde matricea sistemului, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, este triunghiulară.

Pentru ca sistemul să admită soluție unică, matricea trebuie să fie nesingulară.

Cum matricea este triunghiulară, determinatul ei este produsul elementelor de pe diagonală, adică:

$$\det A = a_{11}a_{22} \cdots a_{nn}.$$

Prin urmare,

$$\det A \neq 0 \Rightarrow a_{ii} \neq 0, \quad \forall i = 1, \dots, n.$$

Metoda substituției

Vom considera întâi cazul în care matricea A este **inferior triunghiulară**.

Așadar, sistemul $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ poate fi scris în forma:

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2, \\ \vdots \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{ii}x_i = b_i, \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{ni}x_i + \cdots + a_{nn}x_n = b_n. \end{array} \right. \quad (1)$$

Metoda substituției

Necunoscutele x_1, x_2, \dots, x_n se determină folosind ecuațiile sistemului (1), de la prima ecuație a sistemului către ultima (*substituție directă*).

Din prima ecuație obținem x_1 :

$$x_1 = \frac{b_1}{a_{11}}. \quad (2)$$

Din a doua ecuație, utilizând valoarea x_1 din (2), obținem:

$$x_2 = \frac{b_2 - a_{21}x_1}{a_{22}}.$$

Metoda substituției

În general, din ecuația i :

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{ii-1}x_{i-1} + a_{ii}x_i = b_i,$$

folosind valorile $x_1, x_2, \cdots, x_{i-1}$ deja calculate, avem

$$x_i = \frac{b_i - a_{i1}x_1 - \cdots - a_{ii-1}x_{i-1}}{a_{ii}}$$

Din ultima ecuație, se obține x_n astfel:

$$x_n = \frac{b_n - a_{n1}x_1 - a_{n2}x_2 - \cdots - a_{nn-1}x_{n-1}}{a_{nn}}$$

Metoda substituției

Algoritmul de calcul al soluției sistemelor (1) cu matrice inferior triunghiulară este următorul:

$$x_i = \frac{b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j}{a_{ii}}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

(Prin convenție, pentru $i = 1$, suma este nulă.)

Acest algoritm se numește *metoda substituției directe*.

Metoda substituției inverse

Necunoscutele x_1, x_2, \dots, x_n se determină pe rând, de la ultima ecuație către prima (*substituție inversă*).

Din ultima ecuație obținem:

$$x_n = \frac{b_n}{a_{nn}}.$$

Folosind valoarea lui x_n , din penultima ecuație vom avea:

$$x_{n-1} = \frac{b_{n-1} - a_{n-1n}x_n}{a_{n-1n-1}}.$$

Metoda substituției inverse

Când ajungem la ecuația i :

$$a_{ii}x_i + a_{ii+1}x_{i+1} + \cdots + a_{in}x_n = b_i,$$

necunoscutele $x_{i+1}, x_{i+2}, \dots, x_n$ sunt deja determinate.
Astfel, deducem

$$x_i = \frac{b_i - a_{ii+1}x_{i+1} - \cdots - a_{in}x_n}{a_{ii}}.$$

Din prima ecuație obținem:

$$x_1 = \frac{b_1 - a_{12}x_2 - \cdots - a_{1n}x_n}{a_{11}}.$$

Metoda substituției inverse

Prin urmare, algoritmul de calcul al soluției sistemului (3) cu matrice superior triunghiulară este:

$$x_i = \frac{b_i - \sum_{j=i+1}^n a_{ij}x_j}{a_{ii}}, \quad i = n, n-1, \dots, 2, 1.$$

Acest algoritm se numește *metoda substituției inverse*.

Efortul de calcul-Metoda substituției directe

Notăm:

- M – numărul operațiilor $*$, $/$ (înmulțiri și împărțiri) efectuate;
- A – numărul operațiilor $+$, $-$ (adunări și scăderi) efectuate.

Pentru calculul componentei x_i se efectuează:

$M = n - i + 1$ și $A = n - i$ și în total

$$M = \sum_{i=n}^1 (n - i + 1) = \sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2},$$

$$A = \sum_{i=n}^1 (n - i) = \sum_{k=1}^{n-1} k = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Efortul total de calcul este:

$$M = \frac{n(n+1)}{2} \quad A = \frac{n(n-1)}{2}$$

Algoritmul de eliminare Gauss

Algoritmul de eliminare Gauss se realizează în $n - 1$ pași, prin transformarea sistemului dat într-un sistem echivalent cu matrice superior triunghiulară.

Pasul 1

La acest pas se obține un sistem echivalent

$$A^{(1)}\mathbf{x} = \mathbf{b}^{(1)} \sim A\mathbf{x} = \mathbf{b},$$

unde matricea $A^{(1)}$ are prima coloană în formă superior triunghiulară, adică

$$a_{i1}^{(1)} = 0, \quad i = 2, \dots, n.$$

Algoritmul de eliminare Gauss

Pasul 2

Se construiește sistemul echivalent

$$A^{(2)}\mathbf{x} = \mathbf{b}^{(2)} \sim A\mathbf{x} = \mathbf{b},$$

unde matricea $A^{(2)}$ are primele două coloane în formă superior triunghiulară.

⋮

Pasul r

Se obține sistemul $A^{(r)}\mathbf{x} = \mathbf{b}^{(r)} \sim A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, unde $A^{(r)}$ are primele r coloane în formă superior triunghiulară.

⋮

Pasul $n - 1$

Se obține sistemul $A^{(n-1)}\mathbf{x} = \mathbf{b}^{(n-1)} \sim A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, unde $A^{(n-1)}$ are primele $n - 1$ coloane în formă superior triunghiulară, deci este superior triunghiulară.

Observații privind eliminarea Gauss

Dacă la un anumit pas matricea $A^{(r)}$ **nu poate fi construită** (pivot nul), atunci matricea A este **singulară**.

În realizarea pașilor algoritmului se utilizează următoarele operații elementare:

- ▶ înmulțirea unei ecuații cu un factor / scalar și adunarea acesteia la o altă ecuație;
- ▶ interschimbarea a două ecuații (pivotare pe linii) și/sau interschimbarea a două coloane.

Eliminarea Gauss – Pasul 1

Intrare: sistemul $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

Ieșire: sistemul $A^{(1)}\mathbf{x} = \mathbf{b}^{(1)} \sim A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, unde matricea $A^{(1)}$ are prima coloană în formă superior triunghiulară.

Fie ecuația $i, i = 1, \dots, n$:

$$E_1 : \quad a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n = b_i.$$

Presupunem că $a_{11} \neq 0$.

Eliminarea Gauss – Pasul 1

Următoarele operații au ca obiectiv anularea coeficienților lui x_1 din ecuațiile $2, \dots, n$:

$$E_1 * \left(\frac{-a_{21}}{a_{11}} \right) + E_2 = E_2^{(1)} \Rightarrow a_{21}^{(1)} = 0$$

$$\vdots$$

$$E_1 * \left(\frac{-a_{i1}}{a_{11}} \right) + E_i = E_i^{(1)} \Rightarrow a_{i1}^{(1)} = 0$$

$$\vdots$$

$$E_1 * \left(\frac{-a_{n1}}{a_{11}} \right) + E_n = E_n^{(1)} \Rightarrow a_{n1}^{(1)} = 0$$

Eliminarea Gauss – Pasul 1

Sistemul obținut după Pasul 1, are forma:

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11}^{(1)}x_1 + a_{12}^{(1)}x_2 + \cdots + a_{1n}^{(1)}x_n = b_1^{(1)}, \\ a_{22}^{(1)}x_2 + \cdots + a_{2n}^{(1)}x_n = b_2^{(1)}, \\ \vdots \\ a_{i2}^{(1)}x_2 + \cdots + a_{in}^{(1)}x_n = b_i^{(1)}, \\ \vdots \\ a_{n2}^{(1)}x_2 + \cdots + a_{nn}^{(1)}x_n = b_n^{(1)}. \end{array} \right.$$

Eliminarea Gauss – Pasul 2

Intrare: Sistemul $A^{(1)}\mathbf{x} = \mathbf{b}^{(1)}$.

Ieșire: Sistemul $A^{(2)}\mathbf{x} = \mathbf{b}^{(2)} \sim A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, unde matricea $A^{(2)}$ are primele două coloane în formă superior triunghiulară.

Se presupune că

$$a_{22}^{(1)} \neq 0,$$

și se urmărește anularea elementelor

$$a_{32}^{(2)}, a_{42}^{(2)}, \dots, a_{n2}^{(2)},$$

adică transformarea coloanei a doua în formă superior triunghiulară.

Eliminarea Gauss – Pasul r

Intrare: $A^{(r-1)}\mathbf{x} = \mathbf{b}^{(r-1)}$.

Ieșire: $A^{(r)}\mathbf{x} = \mathbf{b}^{(r)} \sim A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, unde matricea $A^{(r)}$ are primele r coloane în formă superior triunghiulară.

Sistemul are forma:

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11}^{(r-1)}x_1 + \cdots + a_{1r}^{(r-1)} + \cdots + a_{1n}^{(r-1)}x_n = b_1^{(r-1)} \\ \vdots \\ a_{rr}^{(r-1)}x_r + \cdots + a_{rn}^{(r-1)}x_n = b_r^{(r-1)} \\ a_{r+1r}^{(r-1)}x_r + \cdots + a_{r+1n}^{(r-1)}x_n = b_{r+1}^{(r-1)} \\ \vdots \\ a_{ir}^{(r-1)}x_r + \cdots + a_{in}^{(r-1)}x_n = b_i^{(r-1)} \\ \vdots \\ a_{nr}^{(r-1)}x_r + \cdots + a_{nn}^{(r-1)}x_n = b_n^{(r-1)}, \end{array} \right.$$

Eliminarea Gauss – Pasul r

Presupunem că $a_{rr}^{(r-1)} \neq 0$.

Vom urmări anularea elementelor

$$a_{r+1,r}^{(r-1)}, a_{r+2,r}^{(r-1)}, \dots, a_{nr}^{(r-1)}.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} E_r^{(r-1)} * \left(\frac{-a_{r+1r}^{(r-1)}}{a_{rr}^{(r-1)}} \right) + E_{r+1}^{(r-1)} = E_{r+1}^{(r)} \Rightarrow a_{r+1r}^{(r)} = 0 \\ \vdots \\ E_r^{(r-1)} * \left(\frac{-a_{ir}^{(r-1)}}{a_{rr}^{(r-1)}} \right) + E_i^{(r-1)} = E_i^{(r)} \Rightarrow a_{ir}^{(r)} = 0 \\ \vdots \\ E_r^{(r-1)} * \left(\frac{-a_{nr}^{(r-1)}}{a_{rr}^{(r-1)}} \right) + E_n^{(r-1)} = E_n^{(r)} \Rightarrow a_{nr}^{(r)} = 0 \end{array} \right.$$

Pivotare

Se observă că nu se schimbă forma superior triunghiulară a primelor $r - 1$ coloane.

La fiecare pas s-a făcut ipoteza că $a_{rr}^{(r-1)} \neq 0$.

Elementul $a_{rr}^{(r-1)}$ poartă numele de *pivot*.

În cazul în care elementul pivot este nul, se pot aplica următoarele strategii, numite de *tehnici de pivotare*.

Strategii de pivotare

1. Fără pivotare

Se caută primul indice $i_0 \in \{r + 1, r + 2, \dots, n\}$ astfel încât $a_{i_0 r}^{(r-1)} \neq 0$. Se interschimbă ecuațiile i_0 și r .

Să observăm că în procesul de calcul, la pasul r , intervine factorul

$$\frac{1}{a_{rr}^{(r-1)'}}$$

astfel că valori mici ale lui $|a_{rr}^{(r-1)'}|$ conduc la amplificarea erorilor de calcul.

Pentru a asigura stabilitatea numerică a procesului de calcul este de dorit ca $|a_{rr}^{(r-1)'}|$ să fie „mare”.

Strategii de pivotare

2. Pivotare parțială

Se determină indicele i_0 :

$$|a_{i_0 r}^{(r-1)}| = \max\{|a_{ir}^{(r-1)}|; i = r, \dots, n\}.$$

Se interschimbă ecuațiile i_0 și r dacă $i_0 \neq r$.

3. Pivotare totală

Se determină indicii i_0 și j_0 :

$$|a_{i_0 j_0}^{(r-1)}| = \max\{|a_{ij}^{(r-1)}|; i = r, \dots, n, j = r, \dots, n.\}$$

și se interschimbă ecuațiile i_0 și r dacă $i_0 \neq r$ și coloanele j_0 și r , dacă $j_0 \neq r$.

Strategii de pivotare

Schimbarea coloanelor implică schimbarea ordinii variabilelor, astfel încât în final va trebui refăcută ordinea inițială a variabilelor.

Dacă după pivotare elementul pivot rămâne nul,

$$a_{rr}^{(r-1)} = 0,$$

atunci putem deduce că $A^{(r-1)}$ este singulară.

Strategii de pivotare

Într-adevăr, dacă în procesul de pivotare parțială $a_{rr}^{(r-1)} = 0$, atunci prin definiția alegerii pivotului, avem

$$a_{ir}^{(r-1)} = 0, \quad \forall i = r, \dots, n.$$

Rezultă că matricea $A^{(r-1)}$ are forma

$$A^{(r-1)} = \begin{pmatrix} a_{11}^{(r-1)} & \cdots & a_{1r-1}^{(r-1)} & a_{1r}^{(r-1)} & \cdots & a_{1n}^{(r-1)} \\ 0 & \cdots & a_{r-1r-1}^{(r-1)} & a_{r-1r}^{(r-1)} & \cdots & a_{r-1n}^{(r-1)} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & a_{rn}^{(r-1)} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & a_{nn}^{(r-1)} \end{pmatrix}.$$

Strategii de pivotare

Așadar,

$$\det A^{(r-1)} = a_{11}^{(r-1)} a_{22}^{(r-1)} \cdots a_{r-1, r-1}^{(r-1)} \cdot \det \begin{pmatrix} 0 & \cdots & a_{rn}^{(r-1)} \\ \vdots & & \\ 0 & \cdots & a_{nn}^{(r-1)} \end{pmatrix} = 0.$$

Deoarece operațiile efectuate (interschimbări de ecuații și/sau coloane) nu modifică decât semnul determinantului, avem:

$$\det A^{(r-1)} = \pm \det A.$$

Prin urmare, obținem că $\det A = 0$, deci și matricea inițială, A , este singulară.

Strategii de pivotare

Și în cazul procesului de pivotare totală, dacă $a_{rr}^{(r-1)} = 0$, atunci că matricea $A^{(r-1)}$ are forma

$$A^{(r-1)} = \begin{pmatrix} a_{11}^{(r-1)} & a_{12}^{(r-1)} & \cdots & a_{1r-1}^{(r-1)} & \cdots & a_{1n}^{(r-1)} \\ 0 & a_{22}^{(r-1)} & \cdots & a_{2r-1}^{(r-1)} & \cdots & a_{2n}^{(r-1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{r-1r-1}^{(r-1)} & \cdots & a_{r-1n}^{(r-1)} \\ \hline 0 & 0 & \cdots & a_{rr}^{(r-1)} = 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

De aici,

$$\det A^{(r-1)} = 0.$$

$\det A = \pm \det A^{(r-1)} = 0 \Rightarrow A$ este matrice singulară.

Algoritmul eliminării Gauss cu pivotare

```
r = 1;
pivotare(r);
while r ≤ n - 1 and |arr| > ε do
  // Pasul r
  for i = r + 1, ..., n do
    f = - $\frac{a_{ir}}{a_{rr}}$ ;
    for j = r + 1, ..., n do
      aij = aij + f * arj;
    end for
    air = 0;
    bi = bi + f * br;
  end for
  r = r + 1;
  pivotare()
end while
if |arr| ≤ ε then
  'MATRICE SINGULARĂ'
else
  A ← A(n-1), b ← b(n-1)
  Se rezolvă sistemul triunghiular superior Ax = b
end if
```

Numărul de operații

Numărul de operații efectuate la pasul r și în total este:

$$(n - r) [1 * M + (n - r)A + (n - r) * M + 1 * A + 1 * M] \Rightarrow$$

În total:

$$M : \sum_{r=1}^{n-1} (n - r)^2 + 2 \sum_{r=1}^{n-1} (n - r) = \frac{(n - 1)n(2n + 5)}{6}.$$

$$A : \sum_{r=1}^{n-1} (n - r)^2 + \sum_{r=1}^{n-1} (n - r) = \frac{(n - 1)n(n + 1)}{3}.$$

Așadar

$$M : \frac{n^3}{3} + O(n^2); \quad A : \frac{n^3}{3} + O(n^2)$$

```
D:\programe\C\ex_piv_eLG\6 × + ×
n = 25
precizia (p, 10^-p) = 8
Solutia exacta

1.0000000000000000, 2.0000000000000000, 3.0000000000000000, 4.0000000000000000, 5.0000000000000000, 6.0000000000000000
00, 7.0000000000000000, 8.0000000000000000, 9.0000000000000000, 10.0000000000000000, 11.0000000000000000, 12.0000
000000000000, 13.0000000000000000, 14.0000000000000000, 15.0000000000000000, 16.0000000000000000, 17.0000000000000000
0, 18.0000000000000000, 19.0000000000000000, 20.0000000000000000, 21.0000000000000000, 22.0000000000000000, 23.00
000000000000, 24.0000000000000000, 25.0000000000000000,

Solutia cu pivotare

1.0000000000000048, 1.999999999999927, 3.000000000000032, 4.000000000000049, 5.000000000000052, 5.9999999999999
86, 7.000000000000015, 7.999999999999819, 8.99999999999943, 9.99999999999982, 10.999999999999865, 11.99999
9999999881, 13.000000000000201, 14.000000000000197, 15.000000000000137, 15.99999999999988, 16.99999999999968
, 18.000000000000114, 19.000000000000032, 19.99999999999922, 20.9999999999993, 22.000000000000057, 22.999
99999999972, 23.99999999999865, 24.99999999999904,
Eroarea ||x_eLG - x_ex|| = 2.007283e-13

Solutia fara pivotare

0.999999999978640, 2.00000000002581, 2.99999999995357, 3.99999999994235, 5.00000000009267, 6.000000000093
76, 7.00000000005136, 8.00000000013012, 8.9999999999121, 10.00000000005741, 10.99999999998447, 12.0000
0000009278, 12.999999999982702, 13.999999999985056, 14.99999999991832, 16.00000000003624, 16.9999999999614
9, 17.99999999992344, 18.99999999997616, 20.00000000002661, 20.99999999993079, 22.00000000004814, 22.99
999999995552, 24.000000000010306, 25.000000000011294,
Eroarea ||x_eLG - x_ex|| = 2.135958e-11
apasa orice tasta ...
```

```

D:\programe\C\ex_piv_elG\Di x + v
n = 20
precizia (p, 10^-p) = 8
Solutia exacta

1.0000000000000000 , 2.0000000000000000 , 3.0000000000000000 , 4.0000000000000000 , 5.0000000000000000 , 6.0000000000000000
00 , 7.0000000000000000 , 8.0000000000000000 , 9.0000000000000000 , 10.0000000000000000 , 11.0000000000000000 , 12.0000
000000000000 , 13.0000000000000000 , 14.0000000000000000 , 15.0000000000000000 , 16.0000000000000000 , 17.0000000000000000
0 , 18.0000000000000000 , 19.0000000000000000 , 20.0000000000000000 ,

Solutia cu pivotare

0.9999999999999999 , 2.00000000000000084 , 2.999999999999921 , 4.0000000000000095 , 4.999999999999944 , 6.00000000000002
03 , 7.0000000000000093 , 7.999999999999938 , 8.999999999999895 , 10.000000000000009 , 10.999999999999941 , 12.0000
00000000020 , 12.999999999999948 , 14.000000000000046 , 15.000000000000005 , 16.000000000000163 , 17.000000000000002
5 , 17.999999999999897 , 18.999999999999961 , 19.999999999999826 ,
Eroarea ||x_elG - x_ex|| = 4.107894e-13

Solutia fara pivotare

-0.074505805969238 , 0.389355343956926 , 4.820645194866422 , 2.094375460240126 , 5.943948664496422 , 3.230886662323
314 , 5.587307157378671 , 9.282501266815217 , 10.898230480105607 , 8.636651445121283 , 11.440193031003247 , 12.472
152775307816 , 13.855695066282978 , 13.370143609989443 , 14.720612797108322 , 13.755666850190179 , 17.3383665903128
80 , 19.596333503262873 , 18.576045664289339 , 22.874465370775209 ,
Eroarea ||x_elG - x_ex|| = 6.791333e+00
apasa orice tasta ...

```

$$a_{11} = 10 * \varepsilon$$

Eliminarea "chinezească"

200–100 î.Cr., China — *"9 capitole despre arta matematică"*
Metodă de rezolvare foarte asemănătoare eliminării Gauss.

Problema:

"Avem 3 tipuri de grâu. Știm că 3 baloturi din primul tip, 2 baloturi din al doilea tip și 1 balot din al treilea tip cântăresc 39 măsuri. De asemenea, 2 baloturi din primul tip, 3 baloturi din al doilea tip și 1 balot din al treilea tip cântăresc 34 măsuri și 1 balot din primul tip, 2 baloturi din al doilea tip și 3 baloturi din al treilea tip cântăresc 26 măsuri. Câte măsuri cântărește un balot din fiecare tip de grâu".

Eliminarea "chinezească"

Dacă notăm cu b_1, b_2, b_3 greutatea unui balot din fiecare tip, obținem sistemul:

Notația *actuală*

$$\begin{cases} 3b_1 + 2b_2 + b_3 = 39 \\ 2b_1 + 3b_2 + b_3 = 34 \\ b_1 + 2b_2 + 3b_3 = 26 \end{cases}$$

Notația *chinezească*

$$\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 26 & 34 & 39 \end{array}$$

Eliminarea "chinezească" – Pasul 1

Pasul 1

Se înmulțește coloana a doua cu 3 și se scade din ea coloana a treia, atâ timp cât este posibil.

Se înmulțește prima coloană cu 3 și se scade din ea coloana a treia, atâ timp cât este posibil.

Se ajunge la forma:

$$\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 3 \\ 4 & 5 & 2 \\ 8 & 1 & 1 \\ 39 & 24 & 39 \end{array}$$

Eliminarea "chinezească" – Pasul 2

Pasul 2

Se înmulțește prima coloană cu 5 și se scade din ea coloana a doua, atât timp cât este posibil.

Se ajunge la forma:

$$\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & 2 \\ 36 & 1 & 1 \\ 99 & 24 & 39 \end{array}$$

Pentru rezolvare se folosește metoda substituției inverse pe sistemul obținut mai sus.

Descompuneri LU

Fie $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$,

$$A = L \cdot U,$$

unde:

- $L \in \mathbb{R}^{n \times n}$ este inferior triunghiulară,
- $U \in \mathbb{R}^{n \times n}$ este superior triunghiulară.

Pentru rezolvarea sistemului

$$Ax = \mathbf{b} \Leftrightarrow L \cdot Ux = \mathbf{b} \Leftrightarrow \begin{cases} Ly = \mathbf{b} \Rightarrow \text{soluția } \mathbf{y}^* \\ Ux = \mathbf{y} \Rightarrow \text{soluția } \mathbf{x}^*. \end{cases}, \mathbf{x}^* = A^{-1}\mathbf{b}.$$

Descompuneri LU

Fie A_p , minorul principal de ordin p al matricei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, definit prin

$$A_p = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \cdots & a_{pp} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{p \times p}, \quad p = 1, \dots, n.$$

Descompuneri LU

Teoremă (descompunere LU)

Fie $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ o matrice reală pătratică de dimensiune n , astfel încât $A_p \neq 0, \forall p = 1, \dots, n,$.

Atunci există o unică matrice inferior triunghiulară $L = (l_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$, cu $l_{ii} = 1, i = 1, \dots, n$ și o unică matrice superior triunghiulară $U = (u_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$, astfel încât

$$A = L \cdot U. \quad (*)$$

Descompuneri LU

Demonstrație (teorema de descompunere LU):

Existență: Demonstrația se face prin inducție după n , dimensiunea matricii A .

Algoritmul Doolittle de calcul al descompunerii LU

Fie $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ o matrice reală pătratică de dimensiune n care satisface ipotezele teoremei de mai sus. Algoritmul de calcul al matricelor L și U are n etape.

La fiecare pas se determină simultan:

- câte o linie din matricea U și
- câte o coloană din matricea L .

Descriem în continuare un pas oarecare.

Descompuneri LU

Algoritmul Doolittle – Pasul p ($p = 1, 2, \dots, n$)

Se determină:

- elementele liniei p ale matricei U :

$$u_{pi}, \quad i = p, \dots, n,$$

- elementele coloanei p ale matricei L :

$$l_{ip}, \quad i = p + 1, \dots, n,$$

Cu convențiile:

$$l_{pp} = 1,$$

și

$$u_{pi} = l_{ip} = 0, \quad i = 1, \dots, p - 1.$$

Descompuneri LU

Algoritmul Doolittle – Pasul p ($p = 1, 2, \dots, n$)

Astfel, linia p a matricei U va avea forma:

$$(0 \quad 0 \quad \cdots \quad 0 \quad u_{pp} \quad u_{pp+1} \quad \cdots \quad u_{pn})$$

iar coloana p a matricei L va fi

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ l_{np} \end{pmatrix}$$

Descompuneri LU

Algoritmul Doolittle – Pasul p ($p = 1, 2, \dots, n$)

Se cunosc de la pașii anteriori:

- elementele primelor $p - 1$ linii din U

$$u_{kj}, \quad \forall k = 1, \dots, p - 1, \quad j = 1, \dots, n,$$

- elementele primelor $p - 1$ coloane din L

$$l_{ik}, \quad \forall k = 1, \dots, p - 1, \quad i = 1, \dots, n.$$

Descompuneri LU

Algoritmul Doolittle – Pasul p ($p = 1, 2, \dots, n$)

Calculul elementelor **liniei** p din matricea U , u_{pi} , $i = p, \dots, n$, se face folosind elementele a_{pi} și $(LU)_{pi}$.

Astfel, avem:

$$\begin{aligned} a_{pi} = (LU)_{pi} &= \sum_{k=1}^n l_{pk} u_{ki} \quad (l_{pk} = 0, k = p + 1, \dots, n) = \sum_{k=1}^p l_{pk} u_{ki} \\ &= l_{pp} u_{pi} + \sum_{k=1}^{p-1} l_{pk} u_{ki}. \end{aligned}$$

Pentru $i = p, \dots, n$ avem:

$$u_{pi} = a_{pi} - \sum_{k=1}^{p-1} l_{pk} u_{ki}.$$

unde $l_{pp} = 1$, l_{pk} , u_{ki} , $k = 1, \dots, p - 1$ sunt elemente de pe coloane din L și linii din U calculate la pașii anteriori.

Descompuneri LU

Algoritmul Doolittle – Pasul p ($p = 1, 2, \dots, n$)

Calculul elementelor **coloanei** p din matricea L ,

$$l_{ip}, \quad i = p + 1, \dots, n,$$

unde $l_{ip} = 0, i = 1, \dots, p - 1, l_{pp} = 1$, se face analog.

$$\begin{aligned} a_{ip} &= (LU)_{ip} = \sum_{k=1}^n l_{ik}u_{kp} \quad (u_{kp} = 0, k = p + 1, \dots, n) \\ &= \sum_{k=1}^p l_{ik}u_{kp} = l_{ip}u_{pp} + \sum_{k=1}^{p-1} l_{ik}u_{kp}. \end{aligned}$$

Descompuneri LU

Algoritmul Doolittle – Pasul p ($p = 1, 2, \dots, n$)

Dacă $u_{pp} \neq 0$, putem calcula elementele nenule ale coloanei p din matricea L astfel:

$$l_{ip} = \frac{a_{ip} - \sum_{k=1}^{p-1} l_{pk} u_{ki}}{u_{pp}}, \quad i = p + 1, \dots, n.$$

unde elementele $l_{pk}, u_{ki}, \quad k = 1, \dots, p - 1$ sunt calculate anterior pasului p .

Dacă $u_{pp} = 0$, calculele se opresc - descompunerea LU nu poate fi calculată - matricea A are un minor A_p cu determinatul 0.

Descompuneri LU

Demonstrație (teorema de descompunere LU):

Unicitatea: Demonstrație prin reducere la absurd.

Facem observația că inversa unei matrice nesingulare triunghiulară inferior (superior) este o matrice de același tip.

Presupunem că

$$A = L \cdot U = L_1 \cdot U_1 \quad (**)$$

Din ipoteza A nesingulară rezultă existența inverselor matricelor L, L_1, U, U_1 . Înmulțind egalitatea $(**)$ la stânga cu L^{-1} și cu U_1^{-1} la dreapta obținem:

$$U \cdot U_1^{-1} = L^{-1} \cdot L_1.$$

Descompuneri LU

Demonstrație (teorema de descompunere LU):

Matricea $L^{-1} \cdot L_1$ este inferior triunghiulară cu elementele diagonale egale cu 1, iar matricea $U \cdot U_1^{-1}$ este superior triunghiulară.

Prin urmare, avem

$$U \cdot U_1^{-1} = L^{-1}L_1 = I_n,$$

deci $L = L_1$, $U = U_1$.

Numărul de operații – Descompunerea LU

A- numărul de adunări și scăderi

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \sum_{p=1}^n \left[(n-p+1)(p-1) + (n-p)(p-1) \right] = \frac{n(n-1)(2n-1)}{6} \\ &= \frac{1}{3}n^3 + O(n^2) \end{aligned}$$

M - numărul de înmulțiri și împărțiri.

$$\begin{aligned} \mathbf{M} &= \sum_{p=1}^n \left[(n-p+1)(p-1) + (n-p)p \right] = \frac{(n-1)n(n+1)}{3} \\ &= \frac{1}{3}n^3 + O(n^2). \end{aligned}$$