Calcul Numeric

Curs 2

Conf. dr. Anca Ignat

Conf. dr. Andreea Arusoaie

February 28, 2026

Spaţii vectoriale. Baze

Exemplu: Spaţiul $\mathbb{R}^n$ este un spaţiu vectorial finit dimensional, în raport cu operaţia de adunare a vectorilor din $\mathbb{R}^n$, şi operaţia de înmulţire a unui vector din $\mathbb{R}^n$ cu un scalar din $K = \mathbb{R}$.

Dimensiunea lui $\mathbb{R}^n$ este $\dim \mathbb{R}^n = n$, iar baza canonică din $\mathbb{R}^n$ este

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, \mathbf{e}_k = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} - \text{ poziţia } k \ , \ldots, \mathbf{e}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Calcul Matriceal

Fie matricea $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, definită prin

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad A = (a_{ij})_{i=1\dots m, j=1\dots n}, \quad a_{ij} \in \mathbb{R}.$$

Se defineşte *matricea transpusă* , A^T, astfel:

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{m1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad A^T = (a_{ji})_{i=1\dots m, j=1\dots n} \in \mathbb{R}^{n \times m}.$$

Calcul Matriceal

Fie matricea $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$, $A = (a_{ij})_{i=1\ldots m, j=1\ldots n}$, cu $a_{ij} \in \mathbb{C}$.

Se defineşte *matricea adjunctă (conjugat transpusă)*, A^H, sau A^* :

$$A^H = \overline{A^T} = (\bar{a}_{ji})_{j=1\ldots n, i=1,\ldots,m}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad A^H = \begin{pmatrix} \bar{a}_{11} & \ldots & \bar{a}_{m1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{a}_{1n} & \ldots & \bar{a}_{mn} \end{pmatrix}$$

unde prin $\bar{a}_{ij}$ înţelegem *conjugatul* numărului complex a_{ij}.

Pentru $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ matricea adjunctă coincide cu transpusa, $A^H = A^T$.

Calcul matriceal

În continuare, vom reprezenta vectorul $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ ca vector coloană. Prin urmare, vom identifica vectorul $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ cu o matrice de dimensiune $n \times 1$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$.

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \rightarrow \mathbf{x}^T = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{pmatrix}$$

Calcul Matriceal

Fie $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, şi fie $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ baza canonică din $\mathbb{R}^n$.

Dacă facem înmulţirea matricială $A\mathbf{e}_j$ obţinem coloana j a matricei A:

$$A\mathbf{e}_j = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \\ \vdots & \\ 1 & \text{poziţia } j \\ \vdots & \\ 0 & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$$

unde

- $A\mathbf{e}_j$ este coloana j a matricei A, $j = 1, \ldots, n$;
- $\mathbf{e}_i^T A$ este linia i a matricei A, $i = 1, \ldots m$.

Produs scalar complex

Fie vectorii $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{C}^n$,

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n. \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n, \quad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n. \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n$$

Produsul scalar complex dintre vectorii $\mathbf{x}$ şi $\mathbf{y}$ este definit astfel:

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y}_i = \mathbf{y}^H \mathbf{x} = \begin{pmatrix} \overline{y}_1 & \overline{y}_2 & \dots & \overline{y}_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Produs scalar real

Fie $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$,

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n. \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n, \quad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n. \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

Atunci avem,

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = \mathbf{y}^T \mathbf{x} = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Proprietăţi ale matricei adjuncte

Proprietăţi ale matricei A^H

1. $(A+B)^H = A^H + B^H$;
2. $(A^H)^H = A$;
3. $(AB)^H = B^H A^H$;
4. $(A^{-1})^H = (A^H)^{-1}$;

Proprietăţi ale matricei A^T

1. $(A+B)^T = A^T + B^T$;
2. $(A^T)^T = A$;
3. $(AB)^T = B^T A^T$;
4. $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$;

Proprietăţi ale matricei adjuncte

Propoziţie

Fie $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$, $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$ şi $\mathbf{y} \in \mathbb{C}^m$. Atunci are loc următoarea relaţie:

$$(A\mathbf{x}, \mathbf{y})_{\mathbb{C}^m} = (\mathbf{x}, A^H\mathbf{y})_{\mathbb{C}^n}.$$

Pentru cazul real avem : Fie $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$. Atunci avem

$$(A\mathbf{x}, \mathbf{y})_{\mathbb{R}^m} = (x, A^Ty)_{\mathbb{R}^n}.$$

Demonstraţie:

$$\begin{aligned}(A\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \mathbf{y}^H(A\mathbf{x}) = \mathbf{y}^HA\mathbf{x} = \mathbf{y}^H(A^H)^H\mathbf{x}\\ &= (A^H\mathbf{y})^H\mathbf{x} = (\mathbf{x}, A^H\mathbf{y}).\end{aligned}$$

Calcul matriceal - Tipuri de matrice

Definiţii

- O matrice $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ se numeşte *simetrică* dacă $A = A^T$.
- O matrice $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ se numeşte *autoadjunctă* dacă $A = A^H$.
- O matrice $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ se numeşte *unitară* dacă

$$AA^H = A^H A = I_n.$$

- O matrice $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ se numeşte *ortogonală* dacă

$$AA^T = A^T A = I_n.$$

Calcul matriceal - Tipuri de matrice

Definiţii

- O matrice $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $A = (a_{ij})$ se numeşte matrice *triunghiulară inferior* (sau *inferior triunghiulară*) dacă

$$a_{ij} = 0 \text{ pentru } j > i,$$

adică dacă este de forma

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ a_{(n-1)1} & a_{(n-1)2} & a_{(n-1)3} & \dots & a_{(n-1)(n-1)} & 0 \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{n(n-1)} & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Calcul matriceal - Tipuri de matrice

Definiţii

- O matrice $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $A = (a_{ij})$ se numeşte matrice *triunghiulară superior* (sau *superior triunghiulară*) dacă

$$a_{ij} = 0 \text{ pentru } j < i,$$

adică dacă este de forma

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1(n-1)} & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2(n-1)} & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3(n-1)} & a_{3n} \\ \vdots & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{(n-1)(n-1)} & a_{(n-1)n} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Calcul matriceal - Tipuri de matrice

Definiţii

- Notăm cu I_n *matricea unitate* (sau *matricea identitate*) din $\mathbb{R}^{n\times n}$, definită prin

$$I_n \in \mathbb{R}^{n\times n}, \quad I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Calcul matriceal - Tipuri de matrice

Definiţii

- O *matrice diagonală* este o matrice $D \in \mathbb{R}^{n\times n}$, de forma $D = diag[d_1, d_2, \ldots, d_n]$, sau

$$D = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & d_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & d_n \end{pmatrix}.$$

Mai mult, au loc următoarele relaţii:

$$D{\cdot}A = \begin{pmatrix} d_1(\mathbf{e}_1^T A) \\ d_2(\mathbf{e}_2^T A) \\ \vdots \\ d_n(\mathbf{e}_n^T A) \end{pmatrix}, \; A{\cdot}D = \begin{pmatrix} d_1(A\mathbf{e}_1) & d_2(A\mathbf{e}_2) & \ldots & d_n(A\mathbf{e}_n) \end{pmatrix}$$

Norme

Definiţie

Fie X un spațiu vectorial real. Se numește *normă* o aplicație

$$\|\cdot\| : X \longrightarrow \mathbb{R}_+$$

care îndeplinește următoarele condiții:

(1) $\|\mathbf{x}\| \geq 0$ pentru orice $\mathbf{x} \in X$ și

$$\|\mathbf{x}\| = 0 \iff \mathbf{x} = 0;$$

(2) $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|, \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in X;$

(3) $\|\lambda \mathbf{x}\| = |\lambda| \, \|\mathbf{x}\|, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall \mathbf{x} \in X.$

Vom numi *norme vectoriale* normele definite pe spațiile $X = \mathbb{R}^n$ sau $X = \mathbb{C}^n$.

Norme - Exemple

Fie spațiile vectoriale $X = \mathbb{R}^n$ sau $X = \mathbb{C}^n$. Pe aceste spații, următoarele aplicații sunt norme vectoriale:

- *Norma 1 - norma city-block / Manhattan:*

$$\|\mathbf{x}\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|.$$

- *Norma 2 - norma euclidiană:*

$$\|\mathbf{x}\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2}.$$

- *Norma infinit - norma Cebyshev / a tablei de șah:*

$$\|x\|_\infty = \max\{|x_i|, i = 1, \ldots, n\}.$$

Norme - Exemple

Dacă $\|\cdot\|_v$ este o normă vectorială şi $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ este o matrice nesingulară ($\det P \neq 0$) atunci aplicaţia $\|\cdot\|_P : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, definită prin

$$\|\mathbf{x}\|_P = \|P\mathbf{x}\|_v$$

este de asemenea o normă vectorială.

Produs scalar

Se numește *produs scalar* în spațiul vectorial X (peste corpul $K = \mathbb{R}$ sau $K = \mathbb{C}$) aplicația

$$(\cdot, \cdot) : X \times X \longrightarrow K$$

care satisface următoarele condiții:

(a) $(\mathbf{x}, \mathbf{x}) \geq 0, \forall \mathbf{x} \in X$, și $(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = 0$;

(b) $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \overline{(\mathbf{y}, \mathbf{x})}, \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in X$;

(c) $(\lambda \mathbf{x}, \mathbf{y}) = \lambda (\mathbf{x}, \mathbf{y}), \forall \lambda \in K, \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in X$;

(d) $(\mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{z}) = (\mathbf{x}, \mathbf{z}) + (\mathbf{y}, \mathbf{z}), \forall \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in X$.

Produs scalar

Inegalitatea lui Cauchy-Buniakowski-Schwarz:

$$|(\mathbf{x}, \mathbf{y})| \leq \sqrt{(\mathbf{x}, \mathbf{x})}\sqrt{(\mathbf{y}, \mathbf{y})}, \ \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in X.$$

Într-un spaţiu vectorial dotat cu produs scalar se poate induce o normă, numită *normă euclidiană*, astfel:

$$\|\mathbf{x}\|_2 = |\mathbf{x}| := \sqrt{(\mathbf{x}, \mathbf{x})}.$$

Norma euclidiană

Reamintim definiția produselor scalare pe spațiile $\mathbb{R}^n$ și $\mathbb{C}^n$, introduse anterior:

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i, \qquad \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n,$$

respectiv

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y_i}, \qquad \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{C}^n.$$

Norma indusă de aceste produse scalare este norma euclidiană (valabilă în spațiile $\mathbb{R}^n$ și $\mathbb{C}^n$), definită prin

$$\|\mathbf{x}\|_2 = \sqrt{(\mathbf{x}, \mathbf{x})} = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 \right)^{1/2}.$$

Norme matriceale

Definiție.

Aplicația $\|\cdot\| : \mathbb{R}^{n\times n} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ se numește *normă matriceală* dacă satisface următoarele condiții:

(1) $\|A\| \geq 0, \forall A \in \mathbb{R}^{n\times n}; \|A\| = 0 \Leftrightarrow A = O_n;$

(2) $\|\alpha A\| = |\alpha| \, \|A\|, \ \forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall A \in \mathbb{R}^{n\times n};$

(3) $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|, \forall A, B \in \mathbb{R}^{n\times n};$

(4) $\|A \cdot B\| \leq \|A\| \cdot \|B\|, \forall A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}.$

Norme matriceale - Exemple

- *Norma Frobenius*, definită prin relația

$$\|A\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|^2},$$

pentru orice matrice $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, este o normă matriceală.

Norme matriceale

Observaţie: Aplicația

$$\|A\|_{\max} = \max\{\, |a_{ij}|\ ;\ 1 \le i \le n,\ 1 \le j \le n \,\}$$

NU este o normă matriceală.

Spre exemplu, dacă pentru $n = 2$, considerăm matricile

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix},\ B = A^T = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

atunci, se poate observa că

$$A \cdot B = I_2, \quad \|A\|_{max} = \|B\|_{max} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

dar

$$\|A \cdot B\|_{max} = 1 > \|A\|_{max} \cdot \|B\|_{max} = \frac{1}{2}.$$

Norme matriceale naturale (induse)

Fie $\|\cdot\|_v : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}_+$ o normă vectorială. Aplicația

$$\|\cdot\|_i : \mathbb{R}^{n\times n} \longrightarrow \mathbb{R}_+,$$

definită prin

$$\|A\|_i = \max\left\{\frac{\|A\mathbf{x}\|_v}{\|\mathbf{x}\|_v}\ ;\ \mathbf{x}\in\mathbb{R}^n,\ x\neq 0\right\},$$

se numește *normă matriceală naturală* sau *normă indusă* de norma vectorială $\|\cdot\|_v$.

Definiții echivalente:

$$\|A\|_i = \max\{\|A\mathbf{x}\|_v; \mathbf{x}\in\mathbb{R}^n, \|\mathbf{x}\|_v \leq 1\}$$

$$\|A\|_i = \max\{\|A\mathbf{x}\|_v; \mathbf{x}\in\mathbb{R}^n,\ \|\mathbf{x}\|_v = 1\}.$$

Norme matriceale naturale (induse)

Avem următoarea relație pentru normele matriceale naturale:

$$\|A\mathbf{x}\|_v \leq \|A\|_i \, \|\mathbf{x}\|_v,$$

pentru orice $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ şi $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.
Observaţie: Norma Frobenius $\|\cdot\|_F$ **nu** este o normă matriceală naturală (indusă).
Într-adevăr, pentru matricea identitate I_n avem:

$$\|I\|_i = \max\left\{\frac{\|I_n\mathbf{x}\|_v}{\|\mathbf{x}\|_v}; \mathbf{x} \neq 0\right\} = \max\left\{\frac{\|\mathbf{x}\|_v}{\|\mathbf{x}\|_v}; \mathbf{x} \neq 0\right\} = 1$$

iar

$$\|I_n\|_F = (1 + 1 + \ldots + 1)^{1/2} = \sqrt{n} \neq 1, \text{ pentru } n \geq 2.$$

Prin urmare, norma Frobenius nu poate fi o normă matriceală naturală.

Norme matriceale naturale (induse)

- Pentru norma vectorială $\|\mathbf{x}\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$, norma matriceală indusă este

$$\|A\|_1 = \max \left\{ \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| \; ; \; j = 1, 2, \ldots, n \right\}.$$

- Pentru norma vectorială $\|\mathbf{x}\|_\infty = \max_{1 \le i \le n} |x_i|$, norma matriceală indusă este

$$\|A\|_\infty = \max \left\{ \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \; ; \; i = 1, 2, \ldots, n \right\}.$$