Calcul Numeric

Curs 1

Conf. dr. Anca Ignat

Conf. dr. Andreea Arusoaie

February 21, 2026

Echipa

- Anca Ignat
- Andreea Arusoaie
- Iulia-Cătălina Pleşca
- Sebastian Ciobanu
- Robert Găină
- Radu Miron

Echipa Curs

- Anca Ignat
  anca.ignat@uaic.ro ancai_fii@yahoo.ro
- Andreea Arusoaie
  andreea.arusoaie@info.uaic.ro

Pagina cursului

https://edu.info.uaic.ro/calcul-numeric/CN/

Server Discord

https://discord.gg/6egzE5cBPK

Consultaţii

- prin email, la adresele de mai sus sau
- online, WebEx, Discord
- Marţi, 18-19 (A. Ignat), Luni, 10-11 (A. Arusoaie)

Regulament – 2026

Laborator

- 8 teme
- Prezentarea temelor până la termenul limită permite obținerea punctajului maxim alocat fiecărei teme.
- Prezentarea temelor după termenul limită presupune acordarea a maximum 50% din punctajul temei prezentate.

Regulament – 2026

Examen

- teză scrisă de 1 oră, cu 3 sau 4 exerciții din materia predată.
- în prima jumătate de oră a testului - acces doar la documetație tipărită (fără resurse electronice)
- teza scrisă este notată între 1 şi 10.
- testul scris va avea loc:
  - în săptămâna 11 - din primele 9 cursuri;
  - în săptămâna a 12-a - pentru cei care nu obțin punctaj de promovare sau pentru mărirea notei - din toate cursurile.

Calculul punctajului / notei final(e)

Punctaj final = punctaj laborator + 50*nota test scris

Reguli de promovare a disciplinei:

- **nota la testul scris** ≥ 3;
- **punctajul final** $\geq$ **450**;

Nota finală se calculează din **punctajul final**.

Desfăşurarea semestrului

Săptămânile 1-7 şi **9-12** – şcoală conform orarului

Săptămâna a 8-a (prima săptămână de evaluare) – liberă

Săptămânile 11, 12 - test scris

Bibliografie

1. Elemente de informatică şi calcul numeric, vol. 1 - C.Ignat, C.Ilioi, T.Jucan - Ed. Univ. 'Al. I. Cuza' Iaşi, 1987
2. Matrix Computations - G.H. Golub, C.F. van Loan - John Hopkins Univ. Press, 2012
3. Numerical Analysis – R.L. Burden, J.D. Faires – Brooks/Cole, Thomson Learning (10-th edition, 2015)
4. Calcul numeric în C - T. A. Beu - Ed. Albastră, Cluj, 2004
5. Numerical analysis with algorithms and programming, Santanu Saha Ray, CRC Press, 2016.
6. Numerical Recipes 3rd Edition: The Art of Scientific Computing, W.H. Press, S.A. Teukolsky, W.T. Vetterling, B.P. Flannery, Cambridge University Press, NY, USA, 2007 (`http://numerical.recipes/`)
7. Linear Algebra, Ideas and Applications - R.C. Penney, 4-th ed., Wiley, 2016
8. Numerical Optimization – J. Nocedal, S.J. Wright, Springer-Verlag, New York, 1999

Capitolele Cursului

- Rezolvarea sistemelor liniare ($A\mathbf{x} = \mathbf{b}$)
- Optimizare numerică ($\min\{F(\mathbf{x}); \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n\}$)
- Valori şi vectori proprii ($A\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u}$)
- Interpolare numerică
- Ecuaţii neliniare ($f(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$.)

“The world cannot be understood without numbers. But the world cannot be understood with numbers alone.”

Hans Rosling, Anna Rosling Ronnlund, Ola Rosling

Factfulness. Zece motive pentru care interpretăm greşit lumea şi de ce lucrurile stau mai bine decât crezi

“The world cannot be understood without numbers, nor through numbers alone.”

Traffic Flow

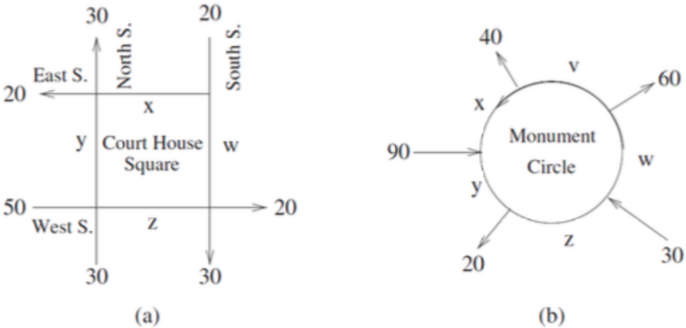


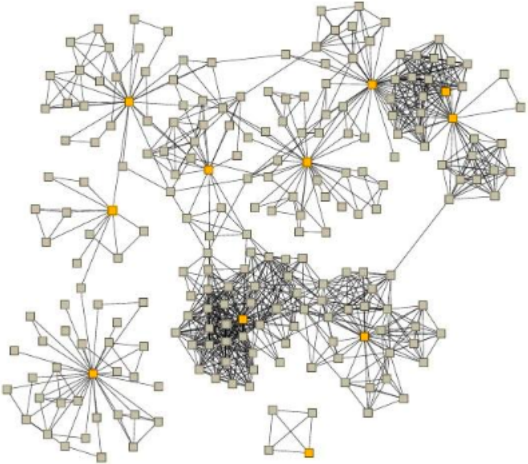
Figure: Two traffic patterns

(R.C. Penney-Linear Algebra, Ideas and Applications, 4-th ed., Wiley, 2016)

- străzi cu sens unic;
- numerele reprezintă numărul mediu de mașini pe minut care intră sau ies de pe o stradă la ora 15:30;
- $x, y, z, w, \ldots$ – numărul mediu de mașini pe minut pe o anumită stradă;
- numărul de mașini care intră = numărul de mașini care ies.

- străzi cu sens unic;
- numerele reprezintă numărul mediu de mașini pe minut care intră sau ies de pe o stradă la ora 15:30;
- $x, y, z, w, \ldots$ – numărul mediu de mașini pe minut pe o anumită stradă;
- numărul de mașini care intră = numărul de mașini care ies.

$$\begin{cases} x + y = 50 \\ y + z = 80 \\ z + w = 50 \\ x + w = 20 \\ x + y + z + w = 100 \end{cases}$$



Centralitate în reţelele sociale

- noţiune introdusă de *A. Bavelas* în 1948 studiind comunicarea între oameni;
- (V, E) – graful care modelează reţeaua,
- A – matricea de adiacenţă asociată, $A = (a_{ij})_{i,j=1}^{N}$, $N = |?|$;

Care sunt cele mai 'importante' noduri din reţea?

1. **Centralitate de grad** (‘degree centrality‘) – se bazează pe noţiunea de grad/grade asociate nodurilor în grafuri.

Se numeşte **drum geodesic** între două vârfuri orice drum de lungime minimă (număr minim de muchii) dintre cele 2 vârfuri.

2. **Centralitate de apropiere** (‘closeness centrality‘)

Centralitatea de apropiere a unui nod este suma lungimilor drumurilor geodesice de la nodul respectiv la toate celelalte noduri.

3. **Centralitate de interrelaţie** (‘betweenness centrality‘)

$$b(v) = \sum_{\substack{s \neq v \neq t, \\ s,t \in V}} \frac{n_{st}(v)}{n_{st}}$$

unde n_{st} este numărul total de drumuri geodesice între nodurile s şi t, iar $n_{st}(v)$ este numărul de drumuri geodesice care trec prin nodul v.

- măsoară controlul pe care îl deţine nodul **v** în circulaţia informaţiilor în reţea.

4. **Centralitate de vector propriu** (‘eigenvector centrality‘)

- se ţine cont de faptul că nu toate muchiile (conexiunile) sunt la fel de importante (ca în cazul centralităţii de grad);
- conexiunile către persoane influente vor ‘împrumuta’ importanţă mai mare decât conexiunile către persoanele mai puţin influente;

  $x(i)$ = centralitatea de vector propriu a nodului v_i.

$$x(i) = \frac{1}{\lambda} \sum_{j \in \Gamma(v_i)} x(j) = \frac{1}{\lambda} \sum_{j=1}^{N} a_{ij} x(j), \quad \text{cu } \lambda > 0 \text{ o constantă}$$

$$\mathbf{x} = (x(1), x(2), \ldots, x(N))^T$$

$$\mathbf{x} = \frac{1}{\lambda} A\mathbf{x} \Leftrightarrow A\mathbf{x} = \lambda \mathbf{x}.$$

$\lambda_A > 0$ – valoarea proprie Perron (cea mai mare valoare proprie), iar **x** este vectorul propriu asociat.

Compresia imaginilor digitale şi descompunerea după valori singulare

O imagine digitală $\leftrightarrow$ matrice de pixeli A cu m linii şi n coloane

$$A = (a_{ij}),\ \ a_{ij} \in \mathbb{R} \text{ sau } \mathbb{R}^3$$

unde i = 1,. . . ,m, j = 1,. . . ,n.

$$\left(a_{ij} \in \{0, 1, \ldots, 255\} \text{ sau } a_{ij} \in \{0, 1, \ldots, 255\}^3 \text{ sau } a_{ij} \in [0, 1]^{(3)} \right)$$

Memorarea lui A: $\mathbf{m} \cdot \mathbf{n} \cdot \mathbf{mem}$(double) $(\cdot 3)$ bytes

Descompunerea după valori singulare (**SVD**) a unei matrici:

$$A = USV^T, \quad U \in \mathbb{R}^{m\times m},\ S \in \mathbb{R}^{m\times n},\ V \in \mathbb{R}^{n\times n}$$

$U = [u_1, u_2, \ldots, u_m]$, $\quad V = [v_1, v_2, \ldots, v_n]$ - matrici ortogonale.

În plus, avem

$$(u_i, u_j)_{\mathbb{R}^m} = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{dacă } i = j \\ 0, & \text{dacă } i \neq j \end{cases}, (v_i, v_j)_{\mathbb{R}^n} = \delta_{ij}, \forall i, j$$

$$S = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 & \cdots & 0 & & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 & \cdots & 0 & & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \sigma_{\mathbf{r}} & & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & & 0 \end{pmatrix}_{m \times n}$$

$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \ldots \geq \sigma_r > 0$,
$r \leq \min\{m, n\}$ - valorile singulare ale matricii A.

Compresia imaginilor digitale şi descompunerea după valori singulare

$$A = \sigma_1\, u_1 v_1^T + \sigma_2\, u_2 v_2^T + \cdots + \sigma_r\, u_r v_r^T$$

$$A \approx A_k = \sigma_1\, u_1 v_1^T + \sigma_2\, u_2 v_2^T + \cdots + \sigma_k\, u_k v_k^T$$

Memorarea lui A_k necesită $k(m+n+1) \cdot mem(\text{double})$

$$m = 1600, \quad n = 1200, \quad r_c = \frac{mn}{k(m+n+1)},$$

$k = 50 \;\; r_c = 13.71;$ $\quad$ $k = 300 \;\; r_c = 2.28;$

$k = 500 \;\; r_c = 1.37;$ $\quad$ $k = 600 \;\; r_c = 1.14;$

$k = 700 \;\; r_c = 0.98;$ $\quad$ $k = 1200 \;\; r_c = 0.57.$

Vectori şi matrice

Fie $x_i, y_i, \lambda \in \mathbb{R}$. Se definesc vectorii $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ şi operaţiile de adunare şi înmulţire cu scalari, astfel:

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \ \mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \mathbf{x} + \mathbf{y} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}, \lambda\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{pmatrix}$$

Vectori din $\mathbb{C}^n$

Fie vectorul $\mathbf{z} \in \mathbb{C}^n$:

$$\mathbf{z} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}, \text{ cu } z_1, z_2, \dots, z_n \in \mathbb{C}.$$

Pentru $z \in \mathbb{C}$ utilizăm notaţiile:

$$z = a + ib, \ \mathrm{Re}(z) = a, \ \mathrm{Im}(z) = b,$$

$\overline{z} = a - ib$ - conjugatul numărului z.

$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ - modulul numărului complex z.

Notăm cu $\mathbb{R}^{m\times n}/\mathbb{C}^{m\times n}$ spaţiul matricilor cu elemente reale / complexe cu m linii şi n coloane cu elemente din $\mathbb{R}$, respectiv din $\mathbb{C}$.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

unde $a_{ij} \in \mathbb{R}/\mathbb{C}$, iar $i = 1, 2, \dots, m$, $j = 1, 2, \dots, n$.

Spaţii vectoriale

Fie X o mulţime nevidă şi fie următoarele operaţii

$$+ : X \times X \longrightarrow X \text{ şi } \cdot : K \times X \longrightarrow X, \quad (K = \mathbb{R}).$$

X se numeşte *spaţiu vectorial (spaţiu liniar)* dacă $(X, +)$ este grup comutativ:

- $a + b = b + a, \ \forall a, b \in X$ - *comutativitate*;
- $(a + b) + c = a + (b + c), \ \forall a, b, c \in X$ - *asociativitate*;
- $\exists 0 \in X, \text{ a.î. } a + 0 = 0 + a, \ \forall a \in X$ - *element neutru*;
- $\forall a \in X, \exists - a \in X \text{ a.î. } a + (-a) = (-a) + a = 0, \forall a, b \in X$ - *element opus*;

iar pentru operaţia de înmulţire cu scalari au loc relaţiile:

- $\lambda(a + b) = \lambda a + \lambda b, \forall \lambda \in K, \forall a, b \in X,$
- $(\lambda + \mu)a = \lambda a + \mu a, \forall \lambda, \mu \in K, \forall a \in X,$
- $\lambda(\mu a) = (\lambda \mu)a, \forall \lambda, \mu \in K, \forall a \in X,$
- $\exists 1 \in K, \text{ astfel încât } 1 \cdot a = a, \ \forall a \in X.$

Spaţii vectoriale. Liniară independenţă

Definiţie

Fie X un spaţiu liniar. Spunem că vectorii $x_1, x_2, \dots, x_p \in X$ sunt *liniar independenţi* dacă:

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_p x_p = 0 \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_p = 0, \alpha_i \in K.$$

Spaţiul vectorial X este *finit dimensional* dacă există p vectori liniar independenţi în X, $x_1, x_2, \dots, x_p \in X$, şi orice mulţime de q elemente din X cu $q > p$ este liniar dependentă.

În acest caz dimensiunea spaţiului X este p $(\dim X = p)$.

Spaţii vectoriale. Baze

Fie spaţiul vectorial X finit dimensional cu $\dim X = p$. Orice sistem de p vectori liniar independenţi din X se numeşte *bază* a spaţiului X.

Fie $x_1, x_2, \dots, x_p \in X$ o bază pentru spaţiul X. Atunci pentru $\forall\, x \in X$, $\exists$ unice constantele $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p \in \mathbb{K}$ astfel încât

$$x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_p x_p = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i x_i.$$