Tema 1, 6 noiembrie 2026

Termen de predare: 08:00 dimineaţa, 13 noiembrie 2026

- **Tema poate fi rezolvată în echipe de câte cel mult patru studenţi.**
- **Soluţiile vor fi redactate in LaTeX sau un procesor de texte dintr-o suită Office precum Word, Writer etc. Soluţiile (corect) redactate în LaTeX primesc un bonus de 2 puncte.**
- **Nu rescrieţi enunţurile! Nu este nevoie de mai mult de o pagină pentru fiecare dintre probleme.**
- **ORICE SOLUŢIE COPIATĂ A UNEIA DINTRE PROBLEMELE DE MAI JOS VA FI PENALIZATĂ CU 2 PUNCTE. CADRELE DIDACTICE CARE CONDUC SEMINARIILE ÎŞI REZERVĂ DREPTUL DE A VERIFICA ORIGINALITATEA ŞI AUTENTICITATEA SOLUŢIILOR.**
- **Soluţiile vor fi încărcate până pe 13 noiembrie 2026, 08:00 dimineaţa, a se vedea pagina cursului pentru detalii.**
- **Creaţi o arhivă care să conţină fişierul sursă (un fişier .doc, .odt sau .tex) şi fişierul .pdf, amândouă cu următorul format al numelui:**

  Nume1_grupă_Nume2_grupă_... Tema1.tex (sau .doc, .odt)

  Nume1_grupă_Nume2_grupă_... Tema1.pdf

1. Fie $G = (V, E)$ un graf cu $V = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ astfel încât $d_G(x_1) \geqslant d_G(x_2) \geqslant \ldots \geqslant d_G(x_n)$. Arătaţi că

(a) $d_G(x_1) \leqslant |\{x_i \,:\, d_G(x_i) > 0, 2 \leqslant i \leqslant n\}| \leqslant n - 1$. Când devin cele două inegalităţi simultan egalităţi?

(b) $d_G(x_1) + d_G(x_2) \leqslant 2 + \sum_{j=3}^{n} \min\{d_G(x_j), 2\}$.

(1 + 2 = 3 puncte)

2. Fie $G = (V, E)$ un graf 2-muchie conex, $s, t \in V$, $s \neq t$ şi $c : E \to \mathbb{R}_+$ o funcţie de cost definită pe muchiile sale. Fie T un SP arbore cu rădăcina în s (într-un astfel de arbore fiecare drum din s este un drum de cost minim; vezi şi exerciţiul 9 din cursul 3) şi P un st-drum de cost minim aparţinând acestui arbore ale cărui noduri (în sensul de traversare de la s la t) sunt $u_0 = s, u_1, \ldots, u_p = t$. Alegem $0 \leqslant i \leqslant p - 1$ şi fie V_i^1 şi V_i^2 mulţimile de noduri ale componentelor lui $T - u_i u_{i+1}$.

Demonstraţi că putem găsi un st-drum de cost minim în $G - u_i u_{i+1}$ care să conţină o singură muchie în cross între V_i^1 şi V_i^2.

(3 puncte)

3. Fie $G = (V, E)$ un graf 2-muchie-conex, $c : E \to \mathbb{R}$ o funcţie de cost injectivă definită pe muchiile sale şi T^* un arbore parţial de cost minim al lui G relativ la c. Un **vecin** al lui T^* este un arbore parţial, T, al lui G aşa încât $T = T^* - e^* + e$ pentru anumite două muchii $e^* \in E(T^*)$ şi $e \in E(T) \setminus E(T^*)$.

Descrieţi un algoritm eficient care să determine un vecin al lui T^* de cost minim.

(2 puncte)