Algoritmica grafurilor - Seminar 1

30 septembrie - 3 octombrie 2025

Exerciţiul 1.

Un profesor are p exerciţii şi doreşte să le propună unui grup de n studenţi.

(a) În câte moduri poate să facă acest lucru? (Câte un exerciţiu fiecărui student.)

(b) Aceeaşi întrebare dacă doreşte să le propună exerciţii diferite.

(c) Dar dacă doreşte să ofere câte două exerciţii diferite fiecărui student dar studenţi diferiţi pot primi cel mult un exerciţiu în comun?

Exerciţiul 1'.

Un profesor are p exerciţii şi doreşte să le propună unui grup de n studenţi. În câte moduri poate să facă acest lucru dacă un student poate primi orice număr de exerciţii (eventual niciunul!) iar studenţi diferiţi nu pot primi un acelaşi exerciţiu?

Discutaţi relaţia dintre p şi n (la ambele exerciţii).

Exerciţiul 2. Fie $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ o funcţie. Definim clasa de complexitate a lui f

$$\mathcal{O}(f(n)) = \{g : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^* : \exists a, b, n_0 \in \mathbb{N}^* \text{ a. î. } g(n) \leqslant a \cdot f(n) + b, \forall n \geqslant n_0\}$$

(Observăm că $a = a_g, b = b_g, n_0 = n_{0,g}$.) Printr-un abuz de notaţie scriem $g(n) = \mathcal{O}(f(n)$ în loc de $g(n) \in \mathcal{O}(f(n))$.

(a) Arătaţi că ne putem lipsi de b în definiţia de mai sus.

(b) Arătaţi că dacă $\lim_{n \to \infty} \frac{g(n)}{f(n)} \in \mathbb{R}$, atunci $g(n) = \mathcal{O}(f(n))$

Exerciţiul 3. Arătaţi că

(a) $\sum_{k=1}^{n} k = \mathcal{O}(n^2)$ şi $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \mathcal{O}(n^3)$;

(b) $\log_a n = \mathcal{O}(\log_b n)$ şi $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \mathcal{O}(\log n)$;

Exerciţiul 4. Legenda spune că (Titus Flavius Josephus) nu ar fi devenit faimos fără talentul său de matematician. În timpul primului război iudeo-roman, a făcut parte dintr-un grup de 41 de rebeli iudei blocaţi într-o peşteră de către romani. Preferând să se sinucidă decât să fie capturaţi, rebelii au decis să se aşeze în cerc şi, într-un sens fixat, fiecare a treia persoană să se sinucidă. Josephus, împreună cu un prieten, considerând sinuciderea fără sens a calculat în ce poziţii trebuie să stea aşa încât el şi prietenul să supravieţuiască.

În varianta noastră n persoane sunt aşezate în cerc (numerotate de la 1 la n) şi eliminăm fiecare a a doua persoană până când rămâne una singură. Fie j_n numărul supravieţuitorului.

a) Determinaţi $j_1, j_2, \ldots, j_{10}$.

b) Scrieţi (în pseudocod) o funcţie recursivă pentru a calcula j_n.

(c) Care este formula pentru j_n? (Indicaţie: ce se întâmplă când n devine o putere a lui 2?)

Exerciţiul 5.

Care este numărul maxim, r_n, de regiuni obţinute prin trasarea a n linii în plan?

Exerciţiul 6. Dată o mulţime M cu $n \geqslant 1$ elemente, o partiţie a lui M este o familie de submulţimi ale lui M, $\mathcal{P} = \{M_1, M_2, \ldots, M_k\}$, astfel încât $M_i \neq \varnothing$, $\forall i$, $M_i \cap M_j = \varnothing$, $\forall i \neq j$ şi $\bigcup_{i=1}^{n} M_i = M$. Dacă $\mathcal{P}$ şi $\mathcal{P}'$ sunt două partiţii spunem că $\mathcal{P}$ este mai fină decât $\mathcal{P}'$ dacă pentru orice submulţime $M_i \in \mathcal{P}$ există o submulţime $M'_j \in \mathcal{P}'$ astfel încât $M_i \subseteq M'_j$. Considerăm următoarea problemă de decizie.

PARTITION

Instanţă: M, $|M| = n \in \mathbb{N}^*$ şi două partiţii $\mathcal{P}$, $\mathcal{P}'$ ale lui M.

Întrebare: Este $\mathcal{P}$ mai fină decât $\mathcal{P}'$?

(a) Arătaţi că PARTITION $\in$ P.

(b) Descrieţi o procedură recursivă care să decidă, pentru două partiţii date, dacă una dintre ele este mai fină decât cealaltă.