Seminar 7

1. Arătaţi că următoarele matrice sunt pozitiv definite. Folosind matricele A, vectorii b şi constantele c, construiţi formele pătratice corespunzătoare. Calculaţi punctele de minim ale acestor forme pătratice.

   (a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad , \quad b = \begin{pmatrix} 6 \\ 11 \end{pmatrix} \quad , \quad c = 2;$

   (b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad , \quad b = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} \quad , \quad c = -1;$

   (c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix} \quad , \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 9 \end{pmatrix} \quad , \quad c = 10;$

2. Pentru funcţiile de mai jos calculaţi vectorul gradient $\nabla f(x)$ şi matricea Hessiană, $\nabla^2 f(x)$. Pentru funcţia de la punctul (c), arătaţi că $\sigma'(z) = \sigma(z)(1 - \sigma(z))$.

   (a) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 2x + 3\,;$

   (b) $f(x_1, x_2) = x_1^2 x_2 - 2x_1 x_2^2 + 3x_1 x_2 + 4\,;$

   (c) $f(w_0, w_1) = -\ln\left(1 - \sigma(w_0 - w_1)\right) - \ln\left(\sigma(w_0 + w_1)\right) \quad , \quad \sigma(z) = \dfrac{1}{1 + \exp(-z)}\,;$

   (d) $f(x_1, x_2) = x_1^2 - 4x_1 x_2 + 4.5x_2^2 - 4x_2 + 3\,.$

3. Pentru funcţiile de mai jos, calculaţi x_1 şi x_2, primele două elemente ale şirurilor construite cu metoda gradientului descendent (cu $\eta = 0.1$) şi metoda lui Newton.

   (a) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 2x + 3 \quad , \quad x_0 = 1;$

   (b) $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 - 2x_1 - 4x_2 - 1 \quad , \quad x_0 = (0, 1)^T;$

   (c) $f(x_1, x_2) = x_1^3 - 2x_1 x_2 - 2x_1 - 4x_2 \quad , \quad x_0 = (0, 0)^T.$