

## Seminar 2

1. Rezolvați următoarele sistemele liniare triunghiulare,  $Ax = b$ :

$$(a) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1.5 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2.5 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3.5 \end{pmatrix};$$

$$(b) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix};$$

$$(c) \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix};$$

$$(d) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

2. Calculați inversele matricelor de la punctele (b) și (d) ale exercițiului precedent.

Pentru punctul (b), considerați matricea generală de ordin  $n \times n$  și deduceți forma generală a inversei  $A^{-1}$ .

3. Să se arate că vectorii:

$$x^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad x^3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

sunt liniar dependenți. Modificați componenta a doua a vectorului  $x^3$  astfel încât acești vectori să devină liniar independenți. Sunt acești vectori ortogonali? Calculați cosinusul unghiului dintre vectorii  $x^1$  și  $x^2$ , respectiv cosinusul unghiului dintre vectorii  $x^2$  și  $x^3$ .

4. Fie vectorii

$$x^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad x^3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Arătați că vectorii  $x^1, x^2$  și  $x^3$  sunt liniar independenți, și că nu sunt ortogonali. Utilizând procedeul Gram-Schmidt, ortonormalizați acești vectori. Folosind rezultatul ortonormalizării acestor vectori, rezolvați sistemul liniar  $Ax = b$ , unde:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Calculați inversa matricei  $A$  (folosind descompunerea Gram-Schmidt).

5. Considerăm acum vectorii

$$y^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad y^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad y^3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Arătați că sunt liniar independenți, și că nu sunt ortogonali. Folosind procedeul Gram-Schmidt ortonormalizați acești vectori. Rezolvați sistemul liniar  $Ax = b$ , unde:

$$A = (y^1 \ y^2 \ y^3), \quad b = (4 \ 2 \ 2)^T.$$

Calculați inversa matricei  $A$  (folosind descompunerea Gram-Schmidt).