Seminar 1

1. Fie $\mathbf{x} = (1 \quad 2 \quad \dots \quad n)^T \in \mathbb{N}^n$. Calculaţi $\|\mathbf{x}\|_1$, $\|\mathbf{x}\|_2$ şi $\|\mathbf{x}\|_\infty$.

2. Calculaţi normele $\|\cdot\|_2$, $\|\cdot\|_1$ şi $\|\cdot\|_\infty$ ale următorilor vectori

   a. $\mathbf{x} = (-2, 2, 1)^T$; **d.** $\mathbf{x} = (\sin k, \cos k, 2^k)^T$;

   b. $\mathbf{x} = (2, -1, 3, 4)^T$; **e.** $\mathbf{x} = \left(\frac{4}{k+1}, \frac{2}{k^2}, k^2 e^{-k}\right)^T$;

   c. $\mathbf{x} = \left(3, -4, 0, \frac{3}{2}\right)^T$; **f.** $\mathbf{x} = \left(\frac{2+k}{k}, \frac{1}{\sqrt{k}}, 0, -3\right)^T$;

   unde $k \in \mathbb{N}^*$ fixat.

3. Calculaţi $\|A\|_\infty$ în următoarele situaţii

   a. $A = \begin{pmatrix} 10 & 15 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, **d.** $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 7 \\ -1 & 4 & 0 \\ -7 & 0 & 4 \end{pmatrix}$,

   b. $A = \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 15 & 1 \end{pmatrix}$, **e.** $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$,

   c. $A = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$, **f.** $A = \begin{pmatrix} 1/3 & -1/3 & 1/3 \\ -1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$.

4. Se consideră norma $\|\cdot\|_1$ pe $\mathbb{R}^{n\times n}$(sau $\mathbb{C}^{n\times n}$), definită prin $\|A\|_1 = \max\limits_{1\le j\le n} \sum\limits_{i=1}^{n} |a_{ij}|$.

   a) Arătaţi că $\|\cdot\|_1$ este o normă.

   b) Calculaţi $\|\cdot\|_1$ pentru matricile de la exerciţiul anterior.

5. Arătaţi că $\|\cdot\|_{①}$, definită prin

$$\|A\|_{①} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$$

   unde $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, este o normă de matrici.

6. Norma Frobenius pentru o matrice $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ este definită prin

$$\|A\|_F = \left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|^2\right)^{1/2}.$$

   Arătaţi că $\|\cdot\|_F$ este o normă de matrici.

7. Fie $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$. Arătaţi că $\|\mathbf{x}^*\|_2 = \|\mathbf{x}\|_2$, unde $\mathbf{x}^*$ este transpusa conjugată a lui $\mathbf{x}$.

8. Fie $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$ vectorul alcătuit numai din elemente egale cu $1 - i$. Determinați $\|\mathbf{x}\|_1,\ \|\mathbf{x}^*\|_1,\ \|\mathbf{x}\|_\infty,\ \|\mathbf{x}^*\|_\infty,\ \|\mathbf{x}\|_2,\ \|\mathbf{x}^*\|_2$.

9. Fie $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$. Arătaţi că $\|\mathbf{x}\|_2 \le \sqrt{\|\mathbf{x}\|_1 \cdot \|\mathbf{x}\|_\infty}$.

10. Fie $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{C}^n$, $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$, $x_i, y_i \in \mathbb{C}, i = \overline{1, n}$.

    Atunci produsul scalar complex, este definit astfel:

    $$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \mathbf{y}^H \mathbf{x} = x_1 \overline{y}_1 + \ldots + x_n \overline{y}_n.$$

    a) Arătaţi că $\langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle = \overline{\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle}, \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{C}^n$.

    b) Daţi exemple $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{C}^n$, cu $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle \neq 0$, pentru care $|\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle| = \|\mathbf{x}\|_1 \|\mathbf{y}\|_\infty$. De asemenea, găsiţi exemple de vectori $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{C}^n$, cu $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle \neq 0$ care verifică relaţia $|\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle| = \|\mathbf{x}\|_2 \|\mathbf{y}\|_2$.

11. Fie $A \in \mathbb{C}^{3\times 3}$, definită prin $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ i & -i & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$.

    a) Este matricea A hermitiană?

    b) Verificaţi dacă vectorii coloană a_1, a_2, a_3 ai lui A sunt ortogonali, adică

    $$\langle a_i, a_j \rangle = 0, \forall i, j = 1, 2, 3, i \neq j.$$

    c) Normalizaţi coloanele lui A (obţineţi vectorii u_1, u_2, u_3 de normă 1) şi construiţi matricea $U = [u_1 \ \ u_2 \ \ u_3]$. Este matricea U unitară?

12. Fie $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. Arătaţi că dacă A este unitară, atunci A^H, A^T, şi $\overline{A}$ sunt unitare.