

Tema nr. 3

Date: n - dimensiunea sistemului, ϵ - precizia calculelor, matricea sistemului $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, vectorul termenilor liberi $b \in \mathbb{R}^n$:

- Să se calculeze, când este posibil, o descompunere LU a matricei A ($A = LU$), unde L este matrice inferior triunghiulară cu 1 pe diagonală ($l_{ii} = 1, \forall i$), iar U este matrice superior triunghiulară;
- Folosind această descompunere, să se calculeze, cât mai eficient posibil (cu un număr minim de operații elementare), determinantul matricei A ($\det A = \det L \det U$);
- Utilizând descompunerea LU calculată mai sus și metodele substituției directe și inverse, să se calculeze x_{LU} , o soluție aproximativă a sistemului $Ax = b$;
- Să se verifice soluția calculată prin afișarea normei:

$$\|A^{init}x_{LU} - b^{init}\|_2$$

(această normă ar trebui să fie mai mică decât $10^{-8}, 10^{-9}$)

A^{init} și b^{init} sunt datele inițiale, nu cele modificate pe parcursul algoritmului. Am notat cu $\|\cdot\|_2$ norma Euclidiană.

- *Restricție:* în program să se aloce doar două matrice, A și A^{init} (o copie a matricei inițiale). Descompunerea LU se va calcula direct în matricea A . Cu acest tip de memorare nu se reține diagonală matricei L , dar se va ține cont de faptul că $l_{ii} = 1, \forall i$ în rezolvarea sistemului inferior triunghiular $Ly = b$ (se modifică procedura de rezolvare a sistemelor inferior triunghiulare).
- Folosindu-se una din bibliotecile menționate în pagina laboratorului, să se calculeze și să se afișeze soluția sistemului $Ax = b$ și inversa matricei A , A_{lib}^{-1} . Să se afișeze următoarele norme:

$$\|x_{LU} - x_{lib}\|_2$$

$$\|x_{LU} - A_{lib}^{-1}b^{init}\|_2.$$

- Scrieți programul astfel încât să poată fi testat (și) pe sisteme de dimensiuni mai mari ca 100.

Observații

1. Precizia calculelor ϵ , este un număr pozitiv de forma $\epsilon = 10^{-t}$ (cu $t = 5, 6, \dots, 10, \dots$ la alegere) care este dată de intrare în program (se citește de la tastatură sau din fișier) la fel ca și dimensiunea n a datelor. Acest număr se folosește atunci când testăm dacă o variabilă este 0 sau nu înainte unei operații de împărțire. Dacă vrem să efectuăm operația de împărțire $s = 1/v$ unde $v \in \mathbb{R}$, **NU** vom scrie:

```
if(v != 0) s = 1/v;
else Write(" nu se poate face impartirea");
```

ci vom scrie în program:

```
if(Math.Abs(v) > eps) s = 1/v;
else Write(" nu se poate face impartirea");
```

2. Dacă pentru o matrice A avem descompunerea LU , rezolvarea sistemului $Ax = b$ se reduce la rezolvarea a două sisteme triunghiulare:

$$Ax = b \iff LUx = b \iff \begin{cases} Ly = b, \\ Ux = y. \end{cases}$$

Se rezolvă întâi sistemul inferior triunghiular $Ly = b$. Apoi se rezolvă sistemul superior triunghiular $Ux = y$ unde y este soluția obținută din rezolvarea sistemului precedent, $Ly = b$. Vectorul x rezultat din rezolvarea sistemului $Ux = y$ este și soluția sistemului inițial $Ax = b$.

3. Pentru calculul $\|A^{init}x_{LU} - b^{init}\|_2$ avem:

$$A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad Ax = y \in \mathbb{R}^n, \quad y = (y_i)_{i=1}^n$$

$$y_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

$$z = (z_i)_{i=1}^n \in \mathbb{R}^n, \quad \|z\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n z_i^2}$$

Metodele substituției

Fie sistemul liniar:

$$Ax = b \quad (1)$$

unde matricea sistemului A este triunghiulară. Pentru a găsi soluția unică a sistemului (1), trebuie ca matricea să fie nesingulară. Determinantul matricelor triunghiulare este dat de formula:

$$\det A = a_{11}a_{22} \cdots a_{nn}$$

Prin urmare pentru rezolvarea sistemului (1) vom presupune că:

$$\det A \neq 0 \iff a_{ii} \neq 0 \quad \forall i = 1, 2, \dots, n$$

Vom considera întâi cazul când matricea A este inferior triunghiulară. Sistemul (1) are forma:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &= b_2 \\ \vdots & \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{ii}x_i &= b_i \\ \vdots & \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{ni}x_i + \cdots + a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned}$$

Necunoscutele x_1, x_2, \dots, x_n se deduc folosind ecuațiile sistemului de la prima către ultima.

Din prima ecuație se deduce x_1 :

$$x_1 = \frac{b_1}{a_{11}} \quad (2)$$

Din a doua ecuație, folosind (2), obținem x_2 :

$$x_2 = \frac{b_2 - a_{21}x_1}{a_{22}}$$

Când ajungem la ecuația i :

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{ii-1}x_{i-1} + a_{ii}x_i = b_i$$

folosind variabilele x_1, x_2, \dots, x_{i-1} calculate anterior, avem:

$$x_i = \frac{b_i - a_{i1}x_1 - \dots - a_{ii-1}x_{i-1}}{a_{ii}}$$

Din ultima ecuație se deduce x_n astfel:

$$x_n = \frac{b_n - a_{n1}x_1 - a_{n2}x_2 - \dots - a_{nn-1}x_{n-1}}{a_{nn}}$$

Algoritmul de calcul a soluției sistemelor (1) cu matrice inferior triunghiulară este următorul:

$$x_i = \frac{\left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j\right)}{a_{ii}} \quad , \quad i = 1, 2, \dots, n-1, n \quad (3)$$

Acest algoritm poartă numele de *metoda substituției directe*. Pentru matricele inferior triunghiulare cu 1 pe diagonală ($a_{ii} = 1, \forall i$) formula de mai sus devine:

$$x_i = b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j \quad , \quad i = 1, 2, \dots, n-1, n \quad (4)$$

Vom considera, în continuare sistemul (1) cu matrice superior triunghiulară:

$$\begin{array}{cccccccc} a_{11}x_1 & + & \dots & + & a_{1i}x_i & + & \dots & + & a_{1n-1}x_{n-1} & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ & & \ddots & & & & & & & & & & \\ & & & & a_{ii}x_i & + & \dots & + & a_{in-1}x_{n-1} & + & a_{in}x_n & = & b_i \\ & & & & & & \ddots & & & & & & \\ & & & & & & & & a_{n-1n-1}x_{n-1} & + & a_{n-1n}x_n & = & b_{n-1} \\ & & & & & & & & & & a_{nn}x_n & = & b_n \end{array}$$

Necunoscutele x_1, x_2, \dots, x_n se deduc pe rând, folosind ecuațiile sistemului de la ultima către prima.

Din ultima ecuație găsim x_n :

$$x_n = \frac{b_n}{a_{nn}} \quad (5)$$

Folosind valoarea lui x_n dedusă mai sus, din penultima ecuație a sistemului obținem:

$$x_{n-1} = \frac{b_{n-1} - a_{n-1n}x_n}{a_{n-1n-1}}$$

Când ajungem la ecuația i :

$$a_{ii}x_i + a_{ii+1}x_{i+1} + \dots + a_{in}x_n = b_i$$

se cunosc deja $x_{i+1}, x_{i+2}, \dots, x_n$ și deducem:

$$x_i = \frac{b_i - a_{ii+1}x_{i+1} - \dots - a_{in}x_n}{a_{ii}}$$

Din prima ecuație găsim valoarea lui x_1 :

$$x_1 = \frac{b_1 - a_{12}x_2 - \dots - a_{1n}x_n}{a_{11}}$$

Procedeul descris mai sus poartă numele de *metoda substituției inverse* pentru rezolvarea sistemelor liniare cu matrice superior triunghiulară:

$$x_i = \frac{\left(b_i - \sum_{j=i+1}^n a_{ij}x_j\right)}{a_{ii}}, \quad i = n, n-1, \dots, 2, 1 \quad (6)$$

Pentru matricele superior triunghiulare cu $a_{ii} = 1, \forall i$ formula de mai sus devine:

$$x_i = b_i - \sum_{j=i+1}^n a_{ij}x_j, \quad i = n, n-1, \dots, 2, 1 \quad (7)$$

Descompunerea LU

Dacă $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ este o matrice reală pătratică de dimensiune n astfel încât $\det A_k \neq 0, \forall k = 1, \dots, n$, unde $A_k = (a_{ij})_{i,j=1,\dots,k}$. Atunci, se știe că există o unică matrice inferior triunghiulară $L = (l_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$ cu $l_{ii} = 1, i = 1, \dots, n$ și o unică matrice superior triunghiulară $U = (u_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$ astfel încât

$$A = LU \quad (8)$$

Algoritmul Doolittle de calcul al descompunerii LU

Fie $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ o matrice reală pătratică de dimensiune n care satisface ipotezele teoremei de mai sus. Algoritmul de calcul al matricelor L și U are n etape. La fiecare pas se determină simultan câte o linie din matricea U și câte o coloană din matricea L .

Pasul p ($p = 1, 2, \dots, n$)

Se determină elementele liniei p ale matricei U , $u_{pi}, i = p, \dots, n$, și elementele coloanei p ale matricei L , $l_{ip}, i = p + 1, \dots, n$.

Sunt cunoscute de la pașii anteriori elementele primelor $p - 1$ coloane din L (elemente l_{jk} cu $k = 1, \dots, p - 1$) și elementele primelor $p - 1$ linii din U (elemente u_{ki} cu $k = 1, \dots, p - 1$).

Calculul elementelor liniei p din matricea U : $u_{pi}, i = p, \dots, n$
($u_{pi} = 0, i = 1, \dots, p - 1$)

$$\begin{aligned} a_{pi} &= \sum_{k=1}^n l_{pk} u_{ki} = (l_{pk} = 0, k = p + 1, \dots, n) = \\ &= \sum_{k=1}^p l_{pk} u_{ki} = l_{pp} u_{pi} + \sum_{k=1}^{p-1} l_{pk} u_{ki} \end{aligned}$$

Știind că $l_{pp} = 1$, putem calcula elementele liniei p a matricei U astfel:

$$u_{pi} = a_{pi} - \sum_{k=1}^{p-1} l_{pk} u_{ki}, \quad i = p, \dots, n, \quad u_{pi} = 0 \quad i = 1, \dots, p - 1. \quad (9)$$

($u_{ki}, k = 1, \dots, p - 1$ sunt elemente de pe linii ale matricei U calculate în pașii anteriori iar $l_{pk}, k = 1, \dots, p - 1$, sunt elemente cunoscute de pe coloanele din L , fiind calculate la pașii anteriori)

Calculul elementelor coloanei p din matricea L : l_{ip} , $i = p + 1, \dots, n$
 ($l_{pp} = 1, l_{ip} = 0$, $i = 1, \dots, p - 1$)

$$\begin{aligned} a_{ip} &= \sum_{k=1}^n l_{ik}u_{kp} = (u_{kp} = 0, k = p + 1, \dots, n, u_{ii} = 1) = \\ &= \sum_{k=1}^p l_{ik}u_{kp} = l_{ip}u_{pp} + \sum_{k=1}^{p-1} l_{ik}u_{kp} \end{aligned}$$

Dacă $u_{pp} \neq 0$, putem calcula l_{ip} astfel:

$$l_{ip} = \frac{a_{ip} - \sum_{k=1}^{p-1} l_{ik}u_{kp}}{u_{pp}}, \quad i = p + 1, \dots, n \quad (10)$$

(elementele l_{ik} , $k = 1, \dots, p - 1$ sunt elemente de pe coloane ale matricei L calculate la pașii anteriori iar u_{kp} , $k = 1, \dots, p - 1$, sunt elemente de pe linii deja cunoscute ale matricei U , fiind calculate anterior)

Dacă $u_{pp} = 0$, calculele se opresc, în acest caz descompunerea LU nu poate fi calculată, matricea A are un minor nul, $\det A_p = 0$.

Observație:

Pentru memorarea matricelor L și U se poate folosi matricea A inițială. Vom folosi partea superior triunghiulară a matricei A pentru a memora elementele nenule u_{ij} ale matricei U cu $i = 1, 2, \dots, n$, $j = i, \dots, n$ iar partea strict inferior triunghiulară a matricei A pentru a memora elementele l_{ij} ale matricei L , $i = 2, \dots, n$, $j = 1, 2, \dots, i - 1$. Se observă că nu am memorat nicăieri elementele $l_{ii} = 1 \forall i = 1, \dots, n$. Vom ține cont de acest lucru la rezolvarea sistemului inferior triunghiular. Calculele (9) și (10) se pot face direct în matricea A .

Exemplu

$$A = \begin{pmatrix} 2.5 & 2 & 2 \\ 5 & 6 & 5 \\ 5 & 6 & 6.5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2.5 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1.5 \end{pmatrix}$$

Soluția sistemului:

$$\begin{pmatrix} 2.5 & 2 & 2 \\ 5 & 6 & 5 \\ 5 & 6 & 6.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ este } \begin{pmatrix} 1.6 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$