# Algebră Liniară și Optimizare

## Curs 11

Conf. dr. Anca Ignat

Conf. dr. Corina Forăscu

May 16, 2026

# Rezolvarea ecuaţiilor neliniare

(continuare)

# Metoda tangentei (Newton - Raphson)

Vom presupune că funcția $f \in C^1[a, b]$ este derivabilă pe $[a, b]$ cu derivata continuă în acest interval și satisface relația $f(a)f(b) < 0$.
Pentru a aproxima soluția $x^*$ a ecuației $f(x) = 0$, vom construi un șir $\{x_k\}$ care converge la $x^*$:

$$x_k \longrightarrow x^*, \quad k \longrightarrow \infty.$$

Primul element din șir, $x_0$, se consideră dat.

Următorul element din șir se construiește ca fiind punctul de intersecție al tangentei la graficul funcției $f$ în punctul

$$(x_0, f(x_0))$$

cu axa absciselor.

# Metoda tangentei (Newton - Raphson)

Procedeul se repetă cu $x_1$ pentru a-l obține pe $x_2$, și așa mai departe.

$$x_1 = Ox \cap \text{ tangenta la graficul funcţiei } f \text{ în punctul } (x_0, f(x_0))$$
$$x_2 = Ox \cap \text{ tangenta la graficul funcţiei } f \text{ în punctul } (x_1, f(x_1))$$
$$\vdots$$
$$x_{k+1} = Ox \cap \text{ tangenta la graficul fcţ } f \text{ în punctul } (x_k, f(x_k))$$

Ecuaţia tangentei la graficul funcţiei $f$ într-un punct $(a, f(a))$ este următoarea (pentru o funcţie derivabilă):

$$y = f(a) + f'(a)(x - a).$$

# Metoda Newton–Raphson

Pentru a calcula $x_{k+1}$ din $x_k$ vom considera ecuația tangentei:

$$y = f(x_k) + f'(x_k)(x - x_k).$$

Punând $y = 0$, obținem:

$$0 = f(x_k) + f'(x_k)(x_{k+1} - x_k),$$

de unde rezultă formula de recurență:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, x_0 \text{ dat.}$$

Formula de mai sus poate fi utilizată doar dacă la fiecare pas $f'(x_k) \neq 0$. Dacă la un pas avem $f'(x_k) = 0$, putem calcula câteva iteraţii $x_k$ ($k \geq \bar{k}$) folosind $f'(x_{\bar{k}-1})$.

# Teoremă de convergență (Newton–Raphson)

## Teoremă de convergență (Newton–Raphson)

*Fie* $f \in C^2[a,b]$*, astfel încât:*

$$f(a)f(b) < 0, \quad f'(x) \neq 0, \quad f''(x) \neq 0, \ \forall x \in [a,b].$$

*Dacă alegem punctul inițial* $x_0$ *astfel:*

$$\begin{cases} x_0 = a, & \text{dacă } f(a)f''(a) > 0, \\ x_0 = b, & \text{dacă } f(b)f''(b) > 0, \end{cases}$$

*atunci șirul* $\{x_k\}_{k\geq 0}$ *construit cu metoda tangentei este: monoton, mărginit, convergent către unica soluție* $x^*$ *a ecuației* $f(x) = 0$.

Ordinul de convergență este **mai mare decât 2** .

# Metoda falsei poziții (metoda coardei)

Presupunem că funcția $f \in C[a,b]$ și satisface: $f(a)f(b) < 0$. Vom construi un șir $\{x_k\} \subseteq \mathbb{R}$ care converge la soluția căutată $x^*$:

$$x_k \longrightarrow x^*, \quad k \longrightarrow \infty.$$

Considerăm dat primul element din șir, $x_0$, și un alt punct $\tilde{x}$.

Procedeul de construire a șirului este următorul:

$$\begin{aligned}
x_1 &= Ox \cap \text{ dreapta ce uneşte punctele } (\tilde{x}, f(\tilde{x})), (x_0, f(x_0)) \\
x_2 &= Ox \cap \text{ dreapta ce uneşte punctele } (\tilde{x}, f(\tilde{x})), (x_1, f(x_1)) \\
&\vdots \\
x_{k+1} &= Ox \cap \text{ dreapta ce uneşte punctele } (\tilde{x}, f(\tilde{x})), (x_k, f(x_k))
\end{aligned}$$

# Metoda falsei poziții (metoda coardei)

Ecuaţia dreptei ce trece prin punctele $(a, f(a))$ cu $(b, f(b))$ este:

$$\frac{y - f(a)}{f(a) - f(b)} = \frac{x - a}{a - b}.$$

Pentru a-l obţine pe $x_{k+1}$ din $x_k$ avem:

$$\frac{y - f(x_k)}{f(x_k) - f(\tilde{x})} = \frac{x - x_k}{x_k - \tilde{x}} \;\;, \text{ cu } y = 0.$$

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)(x_k - \tilde{x})}{f(x_k) - f(\tilde{x})} = \frac{\tilde{x} f(x_k) - x_k f(\tilde{x})}{f(x_k) - f(\tilde{x})},$$

cu $k = 0, 1, 2, \ldots, x_0, \tilde{x}$ - date.

# Teoremă de convergență-Metoda falsei poziţii

## Teoremă de convergență

*Fie* $f \in C^2[a,b]$, *cu* $f(a)f(b) < 0$, $f'(x) \neq 0$, $f''(x) \neq 0$, pentru orice $x \in [a,b]$.

*Dacă alegem:*

$$\begin{cases} x_0 = b \text{ și } \tilde{x} = a, & \text{pentru } f(a)f''(a) > 0, \\ x_0 = a \text{ și } \tilde{x} = b, & \text{pentru } f(b)f''(b) > 0, \end{cases}$$

*atunci șirul* $\{x_k\}_{k \geq 0}$ *construit cu metoda falsei poziții este monoton, mărginit, deci convergent la unica soluție* $x^*$ *a ecuației* $f(x) = 0$.

# Metoda secantei

Presupunem că funcția $f$ este continuă, $f \in C[a, b]$ și satisface relaţia $f(a)f(b) < 0$. Vom construi un șir $\{x_k\} \subseteq \mathbb{R}$ care converge la soluția căutată $x^*$,

$$x_k \to x^*, \quad k \to \infty.$$

Considerăm date primele două elemente din șir: $x_0, x_1$.

Procedeul de construire a șirului este următorul:

$$x_2 = Ox \cap \text{ dreapta ce uneşte punctele } (x_0, f(x_0)), (x_1, f(x_1))$$
$$x_3 = Ox \cap \text{ dreapta ce uneşte punctele } (x_1, f(x_1)), (x_2, f(x_2))$$
$$\vdots$$
$$x_{k+1} = Ox \cap \text{ dreapta ce uneşte pct. } (x_{k-1}, f(x_{k-1})), (x_k, f(x_k))$$

$k = 1, 2, \ldots.$

# Metoda secantei

Obținem elementul $x_{k+1}$ din $x_k$ și $x_{k-1}$ astfel:

$$\frac{y - f(x_k)}{f(x_k) - f(x_{k-1})} = \frac{x - x_k}{x_k - x_{k-1}}, \qquad \text{cu } y = 0.$$

Rezultă:

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= x_k - \frac{f(x_k)(x_k - x_{k-1})}{f(x_k) - f(x_{k-1})}. \\ &= \frac{x_{k-1} f(x_k) - x_k f(x_{k-1})}{f(x_k) - f(x_{k-1})}. \end{aligned}$$

unde $k = 1, 2, \ldots, \quad x_0, x_1$ daţi.

# Teoremă de convergență (Metoda secantei)

## Teoremă de convergență

*Fie* $x^*$ *o soluție a ecuației* $f(x) = 0$.
*Presupunem că* $f \in C^2[x^* - r,\ x^* + r]$, $f'(x) \neq 0$, și
$f''(x) \neq 0, \forall x \in [x^* - r,\ x^* + r]$. *Atunci există* $r_0$, *cu*
$0 < r_0 \leq r$, *pentru care, dacă* $x_0, x_1 \in [x^* - r_0,\ x^* + r_0]$, *atunci*
*șirul* $\{x_k\}$ *generat de metoda secantei satisface*
$x_k \in [x^* - r,\ x^* + r], \quad \forall k \geq 2$, *și*

$$x_k \to x^*, \quad k \to \infty.$$

Ordinul de convergență este:

$$q = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \approx 1.61803.$$

# Metoda lui Laguerre

Fie polinomul

$$p(x) = a_0(x - x_1)(x - x_2) \cdot \ldots \cdot (x - x_n),\ a_0 \neq 0.$$

Metoda lui Laguerre propune construirea unui şir de numere care să conveargă la una din rădăcinile polinomului $p$.

Considerăm derivata polinomului $p$:

$$p'(x) = p(x)\left[\frac{1}{x - x_1} + \frac{1}{x - x_2} + \ldots + \frac{1}{x - x_n}\right].$$

# Metoda lui Laguerre

Avem

$$\ln|p(x)| = \ln|a_0| + \ln|x - x_1| + \ln|x - x_2| + \ldots + \ln|x - x_n|.$$

$$\frac{d}{dx}\ln|p(x)| = \frac{1}{x - x_1} + \frac{1}{x - x_2} + \ldots + \frac{1}{x - x_n} = \frac{p'(x)}{p(x)} = G(x),$$

$$-\frac{d^2}{dx^2}\ln|p(x)| = \frac{1}{(x - x_1)^2} + \frac{1}{(x - x_2)^2} + \ldots + \frac{1}{(x - x_n)^2}$$

$$= \frac{[p'(x)]^2 - p(x)p''(x)}{[p(x)]^2} = H(x)$$

# Metoda lui Laguerre

Fie $x_1$ rădăcina pe care vrem s-o aproximăm şi $y_k$ valoarea aproximativă curentă. Notăm cu $a = y_k - x_1$ şi facem presupunerea că $y_k$ se află la aceeaşi distanţă de toate celelalte rădăcini, adică

$$y_k - x_i = b, \ \forall i = 2, \ldots, n.$$

Prin urmare, avem

$$\begin{aligned} G(y_k) &= \frac{p'(y_k)}{p(y_k)} = \frac{1}{a} + \frac{n-1}{b}, \\ H(y_k) &= \frac{[p'(y_k)]^2 - p(y_k)p''(y_k)}{[p(y_k)]^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{n-1}{b^2} \end{aligned} \tag{4}$$

# Metoda lui Laguerre

Rezolvăm sistemul (4) în raport cu $a$ şi obţinem

$$a = \frac{n}{\max\left[G(y_k) \pm \sqrt{(n-1)(nH(y_k) - G^2(y_k))}\right]}$$

Semnul la numitor este ales astfel ca expresia să aibă magnitudine maximă.

Dacă ţinem cont de expresiile pentru $G$ şi $H$ obţinem pentru $a$ următoarea formulă:

$$a = \frac{n\, p(y_k)}{\max\left[p'(y_k) \pm \sqrt{(n-1)^2[p'(y_k)]^2 - n(n-1)p(y_k)p''(y_k)}\right]}$$

# Metoda lui Laguerre

Următorul element din șir va fi

$$y_{k+1} = y_k - a = y_k - \frac{n}{\max\left[G(y_k) \pm \sqrt{(n-1)\left[nH(y_k) - G^2(y_k)\right]}\right]},$$

$$y_{k+1} = y_k - \frac{n\, p(y_k)}{\max\left[p'(y_k) \pm \sqrt{(n-1)^2[p'(y_k)]^2 - n(n-1)p(y_k)p''(y_k)}\right]}$$

Procedeul se oprește când $a$ devine suficient de mic. Metoda lui Laguerre se poate aplica și pentru aproximarea rădăcinilor complexe, precum și pentru polinoame cu coeficienți complecși.

Pentru rădăcini simple, metoda lui Laguerre are ordinul de convergență **3**.

# Sisteme de ecuații neliniare

Considerăm sistemul neliniar:

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0, \\ f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0, \\ \vdots \\ f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0. \end{cases} \iff F(X) = 0, F = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}, \ X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

# Sisteme de ecuaţii liniare

Fie matricea jacobiană asociată funcției $F$. Presupunem că funcțiile $f_i$ sunt diferențiabile.

$$\nabla F(X) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & & & \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix} (x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

# Sisteme de ecuații neliniare

Pentru a găsi soluția $X^*$ a sistemului de ecuații neliniare

$$F(X) = 0,$$

se construiește un șir de vectori $X^{(k)} \in \mathbb{R}^n$ astfel:

$$X^{(0)} \quad - \text{dat},$$

$$X^{(k+1)} = X^{(k)} - \left[\nabla F\left(X^{(k)}\right)\right]^{-1} F\left(X^{(k)}\right) = X^{(k)} + \Delta^{(k)},$$

$$\Delta^{(k)} = -\left[\nabla F\left(X^{(k)}\right)\right]^{-1} F\left(X^{(k)}\right) \in \mathbb{R}^n, \ k = 0, 1, \ldots.$$

# Sisteme de ecuații neliniare

Vectorul de corecție $\Delta^{(k)}$ poate fi calculat și ca soluție a sistemului liniar:

$$\nabla F\left(X^{(k)}\right)\Delta^{(k)} = -F\left(X^{(k)}\right),$$

unde matricea sistemului este matricea jacobiană calculată în punctul $X^{(k)}$, iar vectorul termenilor liberi este $\left(-F\left(X^{(k)}\right)\right)$. Metoda descrisă mai sus poartă numele de metoda Newton. Pentru $n = 1$ metoda Newton este chiar metoda tangentei descrisă anterior.

# Interpolare numerică

# Interpolare numerică

Presupunem că despre o funcţie $f$ cunoaştem doar valorile într-un număr finit de puncte.

Pornind de la aceste date, dorim să aproximăm funcţia $f$ într-un alt punct.

| $x$ | $x_0$ | $x_1$ | $x_2$ | $\cdots$ | $x_{n-1}$ | $x_n$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $f$ | $y_0$ | $y_1$ | $y_2$ | $\cdots$ | $y_{n-1}$ | $y_n$ |

În tabelul de mai sus

$$f(x_i) = y_i, \quad i = 0, 1, \ldots, n, \text{ cu } \quad x_i \neq x_j \text{ pentru } i \neq j.$$

Dat un punct $x \neq x_i$, $i = 0, \ldots, n$, dorim să aproximăm $f(x)$ cunoscând cele $(n+1)$ perechi $(x_i, y_i)$, $i = 0, \ldots, n$.
Punctele $x_i$ se numesc **noduri de interpolare.**

# Polinomul de interpolare Lagrange

Notăm cu $\Pi_n$ mulțimea polinoamelor de grad cel mult $n$. Dimensiunea acestui spaţiu este $n+1$, baza uzuală fiind dată de polinoamele $1, x, x^2, \ldots, x^n$.

Vom construi o altă bază în acest spaţiu, formată din polinoamele $p_i$, definite prin:

$$p_i \in \Pi_n, \text{ astfel ca } p_i(x_j) = \begin{cases} 1, & \text{dacă } j = i, \\ 0, & \text{dacă } j \neq i, \end{cases} \quad i, j = 0, 1, \ldots, n.$$

Aceste polinoame formează baza Lagrange.

# Construcția polinoamelor Lagrange

Din relația $p_i(x_j) = 0, \forall j \neq i$, și faptul că $p_i$ este de grad $n$, rezultă că că $x_0, x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n$ sunt cele $n$ rădăcini ale polinomului $p_i$.

Rezultă că:

$$p_i(x) = c_i(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})\cdots(x - x_n),$$

unde $c_i \in \mathbb{R}$, $i = 0, \dots, n$.

Constanta $c_i$ se determină din condiția: $p_i(x_i) = 1$.

# Construcția polinoamelor Lagrange

Constanta $c_i$ se determină din condiția: $p_i(x_i) = 1$.

$p_i(x_i) = 1 = c_i(x_i - x_0)(x_i - x_1)\cdots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\cdots(x_i - x_n)$,

de unde rezultă

$$c_i = \frac{1}{(x_i - x_0)(x_i - x_1)\cdots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\cdots(x_i - x_n)}.$$

Polinoamele $p_i$ au forma:

$$p_i(x) = \frac{(x - x_0)\cdots(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})\cdots(x - x_n)}{(x_i - x_0)\cdots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\cdots(x_i - x_n)} = \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j},$$

unde $i = 0, \dots, n$.

# Baza Lagrange

## Propoziţie

*Polinoamele $p_0, p_1, \ldots, p_n$ formează o bază în $\Pi_n$.*

*Demonstraţie:* Vom arăta că cele $n+1$ polinoame sunt liniar independente.
Deci $p_0, p_1, \ldots, p_n$ sunt liniar independente dacă

$$q(x) = a_0 p_0(x) + a_1 p_1(x) + \ldots + a_n p_n(x) = 0, \forall x$$

$$\Rightarrow a_0 = \ldots = a_n = 0.$$

# Baza Lagrange

*Demonstrație:* *(continuare)*

Vom face pe rând $x = x_0, x = x_1, \ldots, x = x_n$ în polinomul $q$:

$$\begin{aligned}
x = x_0 : \quad & q(x_0) = a_0 p_0(x_0) + a_1 p_1(x_0) + \ldots + a_n p_n(x_0) \\
& \qquad = a_0 1 + a_1 0 + \ldots + a_n 0 = a_0 = 0 \Rightarrow a_0 = 0. \\
x = x_1 : \quad & q(x_1) = 0 \Rightarrow a_1 = 0. \\
\vdots & \\
x = x_k : \quad & q(x_k) = a_0 p_0(x_k) + \ldots + a_k p_k(x_k) + \ldots + a_n p_n(x_k) \\
& \qquad = a_0 0 + \ldots + a_k 1 + \ldots + a_n 0 \Rightarrow a_k = 0. \\
x = x_n \quad & q(x_n) = 0 \Rightarrow a_n = 0.
\end{aligned}$$

Toate constantele $a_i$ sunt nule deci polinoamele $\{p_i; i = 0, \ldots n\}$ formează o bază în $\Pi_n$. $\square$

# Construirea polinomului de interpolare

Pentru a aproxima funcția $f$, pornind de la tabelul de mai sus, vom construi un polinom $\ell_n \in \Pi_n$ astfel încât să satisfacă **condiţiile de interpolare**

$$\ell_n \in \Pi_n, \ell_n(x_i) = y_i, \quad i = 0, 1, \dots, n. \tag{5}$$

Odată construit acest polinom, vom aproxima $f(x)$ prin $\ell_n(x), f(x) \approx \ell_n(x)$.

Vom scrie polinomul $\ell_n$ în raport cu noua bază Lagrange $\{p_i; i = 0, \dots, n\}$, deci există constantele reale $a_0, a_1, \dots, a_n$ astfel ca

$$\ell_n(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i p_i(x).$$

# Construirea polinomului de interpolare

Aşadar, constantele $a_k$ se determină astfel:

$$y_k = \ell_n(x_k) = a_0 p_0(x_k) + \ldots + a_k p_k(x_k) + \ldots + a_n p_n(x_k)$$

$$= a_0 0 + \ldots + a_k 1 + \ldots + a_n 0 = a_k \Rightarrow a_k = y_k.$$

Prin urmare un polinom de grad $n$ care îndeplinesc condiţiile de interpolare (5) este:

$$\begin{aligned} \ell_n(x) &= \sum_{i=0}^{n} y_i \, p_i(x) \\ &= \sum_{i=0}^{n} y_i \frac{(x - x_0) \cdots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \cdots (x - x_n)}{(x_i - x_0) \cdots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \cdots (x_i - x_n)} \end{aligned}$$

# Construirea polinomului de interpolare

Aşadar, avem

$$\ell_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \tag{6}$$

Polinomul din formula (6) se numeşte **polinomul de interpolare Lagrange**.

# Polinomul de interpolare Lagrange

## Propoziţie

*Polinomul $\ell_n$ dat de formula (6) este* ***unicul*** *polinom de grad $n$ care îndeplineşte condiţiile de interpolare (5).*

*Demonstraţie:* Presupunem că mai există un polinom $q \in \Pi_n$ care îndeplineşte condiţiile (5), adică

$$q \in \Pi_n, q(x_i) = y_i, \quad \forall i = 0, \ldots, n.$$

Fie polinomul $p(x) = \ell_n(x) - q(x) \in \Pi_n$.
Atunci, pentru orice $k = 0, 1, \ldots, n$, avem:

$$p(x_k) = \ell_n(x_k) - q(x_k) = y_k - y_k = 0.$$

Deci polinomul $p$ are ca rădăcini toate nodurile de interpolare.

# Polinomul de interpolare Lagrange

*Demonstraţie:(continuare)*
Polinomul $p$ este polinom de grad cel mult $n$ şi are $(n+1)$ rădăcini distincte $(x_i \neq x_j, \forall i \neq j)$. Acest polinom nu poate fi decât polinomul identic nul, adică

$$p(x) = \ell_n(x) - q(x) \equiv 0, \forall x, \ell_n(x) = q(x), \forall x.$$

Deci polinomul $\ell_n$ este unicul care satisface (5). $\square$

# Polinomul nodurilor de interpolare

Fie $w_{n+1}$ polinomul de grad $n+1$ care are ca rădăcini nodurile de interpolare:

$$w_{n+1}(x) = (x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_n) \in \Pi_{n+1}.$$

Fie $a = \min\{x_0, x_1, \dots, x_n\},\ b = \max\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$.

## Teorema restului(eroarea la interpolare)

*Fie $f \in C^{n+1}[a,b]$ și $\overline{x} \in [a,b]$, $\overline{x} \neq x_i, \forall i = 0, \dots, n$. Atunci există un punct $y \in [a,b],\ y = y(x_0, x_1, \dots, x_n, \overline{x})$ (punctul $y$ depinde de nodurile de interpolare $x_i$ și de punctul $\overline{x}$) astfel încât eroarea la interpolarea numerică este dată de:*

$$f(\overline{x}) - \ell_n(\overline{x}) = \frac{f^{(n+1)}(y)}{(n+1)!}\, w_{n+1}(\overline{x}). \tag{7}$$

# Polinomul nodurilor de interpolare

<u>*Demonstraţie:*</u> Considerăm funcţia $F$:

$$F(x) := f(x) - \ell_n(x) - cw_{n+1}(x).$$

Constanta reală $c$ este aleasă astfel ca $F(\overline{x})$ adică:

$$c = \frac{f(\overline{x}) - \ell_n(\overline{x})}{w_{n+1}(\overline{x})}, (x \neq x_i, \forall i) \Rightarrow w_{n+1}(\overline{x}) \neq 0. \tag{8}$$

Funcţia $f$ fiind de clasă $C^{n+1}$ pe intervalul $[a, b]$ rezultă că şi funcţia $F$ este din $C^{n+1}[a, b]$.
Avem:

$$F(x_i) = f(x_i) - \ell_n(x_i) - cw_{n+1}(x_i) = y_i - y_i - c0 = 0, \forall i = 0, \dots, n.$$

# Polinomul nodurilor de interpolare

*Demonstraţie:* *(continuare)* Funcția auxiliară $F$ are $(n+2)$ zerouri, $x_0, x_1, \ldots, x_n, \overline{x}$. Aplicând succesiv Teorema lui Rolle rezultă că $F'$ are $n+1$ zerouri, $F''$ are $n$ zerouri,...,$F^{(n+1)}$ are 1 zero în intervalul $[a, b]$. Vom nota această rădăcină a lui $F^{(n+1)}$ cu $y$.
Punctul $y$ depinde de zerourile iniţiale $x_0, x_1, \ldots, x_n, \overline{x}$ şi

$$y = y(x_0, x_1, \ldots, y_n, \overline{x}) \in [a, b] \text{ a. î. } F^{(n+1)}(y) = 0. \qquad (9)$$

# Polinomul nodurilor de interpolare

*Demonstraţie: (continuare)* Derivata de ordinul $(n+1)$ a funcţiei $F$ se calculează astfel

$$\begin{aligned} F^{(n+1)}(x) &= f^{(n+1)}(x) - \ell_n^{(n+1)}(x) - c w_{n+1}^{(n+1)}(x) \\ &= f^{(n+1)}(x) - 0 - c(n+1)! = f^{(n+1)}(x) - c(n+1)! \end{aligned} \tag{10}$$

(derivata de ordin $(n+1)$ a polinomului de grad $n$, $\ell_n$, este 0).

Din relaţiile (8),(9) şi (10) rezultă că

$$c = \frac{f^{(n+1)}(y)}{(n+1)!} = \frac{f(\overline{x}) - \ell_n(\overline{x})}{w_{n+1}(x)} \Rightarrow f(\overline{x}) - \ell_n(\overline{x}) = \frac{f^{(n+1)}(y)}{(n+1)!} w_{n+1}(\overline{x}).$$