Algebră Liniară și Optimizare

Curs 10

Conf. dr. Anca Ignat

Conf. dr. Corina Forăscu

May 9, 2026

Descompunerea după valori singulare

Singular Value Decomposition

Descompunerea după valori singulare

Teoremă

Fie $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Atunci există o matrice ortogonală pătratică de dimensiune m, $U \in \mathbb{R}^{m\times m}$, o matrice ortogonală pătratică de dimensiune n, $V \in \mathbb{R}^{n\times n}$ şi constantele pozitive:

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \ldots \geq \sigma_r > 0, \quad r \leq \min\{m, n\}$$

astfel încât

$$A = U\Sigma V^T,\ \Sigma \in \mathbb{R}^{m\times n},\ \Sigma = \begin{pmatrix} D & \mathbf{0}_{r\times(n-r)} \\ \mathbf{0}_{(m-r)\times r} & \mathbf{0}_{(m-r)\times(n-r)} \end{pmatrix}, \quad (1)$$

unde $D \in \mathbb{R}^{r\times r}$, $D = diag(\sigma_1, \ldots, \sigma_r)$.

Descompunerea după valori singulare

Constanta r este chiar rangul matricei A, adică

$$r = \mathrm{rang}(A).$$

Constantele $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_r$ se numesc *valori singulare* ale matricei A.
Folosind relaţia (1) avem:

$$A^T = (U\Sigma V^T)^T = V\Sigma^T U^T,$$

$$AA^T = U\Sigma V^T V\Sigma^T U^T = U\Sigma\Sigma^T U^T = U\Lambda_m U^T,$$

unde

$$\Lambda_m = \Sigma\Sigma^T = \begin{bmatrix} D^2 & \mathbf{0}_{r\times(m-r)} \\ \mathbf{0}_{(m-r)\times r} & \mathbf{0}_{(m-r)\times(m-r)} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m\times m},$$

Descompunerea după valori singulare

$$A^T A = V\Sigma^T U^T U \Sigma V^T = V\Sigma^T \Sigma V^T = V\Lambda_n V^T,$$

unde

$$\Lambda_n = \Sigma^T\Sigma = \begin{bmatrix} D^2 & \mathbf{0}_{r\times(n-r)} \\ \mathbf{0}_{(n-r)\times r} & \mathbf{0}_{(n-r)\times(n-r)} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n}.$$

Ţinând cont de ortogonalitatea matricelor U şi V, putem rescrie relaţiile de mai sus astfel:

$$(AA^T)U = U\Lambda_m, \quad \Lambda_m = \mathrm{diag}(\sigma_1^2, \sigma_2^2, \ldots, \sigma_r^2, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^{m\times m},$$

$$(A^T A)V = V\Lambda_n, \quad \Lambda_n = \mathrm{diag}(\sigma_1^2, \sigma_2^2, \ldots, \sigma_r^2, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^{n\times n}.$$

Descompunerea după valori singulare

Din aceste relaţii deducem că $\sigma_1^2, \sigma_2^2, \ldots, \sigma_r^2$ sunt valorile proprii strict pozitive ale matricelor AA^T şi/sau A^TA, iar matricile U şi V sunt matrici ale căror coloane sunt vectorii proprii asociaţi (cei ce formează baze ortonormate).

Matricile AA^T şi A^TA sunt matrici simetrice:

$$(AA^T)^T = (A^T)^T A^T = AA^T, \qquad (A^TA)^T = A^T(A^T)^T = A^TA,$$

şi au toate valorile proprii nenegative.

$$(AA^T)\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u} \Rightarrow (AA^T\mathbf{u}, \mathbf{u}) = (\lambda\mathbf{u}, \mathbf{u})$$

$$\lambda = \frac{(A^T\mathbf{u}, A^T\mathbf{u})}{(\mathbf{u}, \mathbf{u})} = \frac{\|A^T\mathbf{u}\|_2^2}{\|\mathbf{u}\|_2^2} \geq 0.$$

Descompunerea după valori singulare

Putem folosi descompunerea după valori singulare pentru a defini pseudoinversa unei matrice oarecare, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, cu $n \neq m$.
Fie descompunerea SVD:

$$A = U\Sigma V^T.$$

Dorim să definim inversa lui A sub forma:

$$A^{-1} =_? (U\Sigma V^T)^{-1} = (V^T)^{-1}\Sigma_?^{-1}U^{-1} = V\Sigma_?^{-1}U^T.$$

Rămâne de definit matricea $\Sigma_?^{-1}$.

Descompunerea după valori singulare

Urmând acest raţionament, se defineşte **pseudoinversa Moore–Penrose** a matricei $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ astfel:

$$A^I = V\Sigma^I U^T,\ A^I \in \mathbb{R}^{n\times m},\ \Sigma^I = \begin{pmatrix} D^{-1} & \mathbf{0}_{r\times(m-r)} \\ \mathbf{0}_{(n-r)\times r} & \mathbf{0}_{(n-r)\times(m-r)} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times m},$$

$$D^{-1} \in \mathbb{R}^{r\times r}, \quad D^{-1} = diag\left(\frac{1}{\sigma_1}, \dots, \frac{1}{\sigma_r}\right).$$

Pseudoinversa definită mai sus satisface următoarele proprietăţi:

$$(A^I)^I = A, \forall A \in \mathbb{R}^{m\times n}; \quad (A^T)^I = (A^I)^T, \forall A \in \mathbb{R}^{m\times n}$$

$$AA^IA = A, \quad A^IAA^I = A^I.$$

Descompunerea după valori singulare

Există o proprietate care nu mai este satisfăcută de pseudoinversă, deşi este respectată de inversa clasică:

$$\exists A, B \ \text{ a. î. } (AB)^I \neq B^I A^I.$$

Descompunerea după valori singulare poate fi utilizată şi pentru rezolvarea sistemelor liniare cu matrice oarecare $(m \neq n)$

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}, \qquad A \in \mathbb{R}^{m\times n}, \quad \mathbf{b} \in \mathbb{R}^m, \quad \mathbf{x} := A^I\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n.$$

Rezolvarea sistemelor liniare în sensul celor mai mici pătrate

Problema celor mai mici pătrate

Considerăm sistemul

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b},$$

unde $A \in \mathbb{R}^{m\times n}, \;\; \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \;\; \mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$.
În formă dezvoltată, acesta se scrie:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \vdots \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n = b_i, \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \tag{2}$$

Problema celor mai mici pătrate

Sistemul are soluţii clasice dacă:

$$rang\ A = rang[A \mid b]$$

- $m < n$ - o infinitate de soluţii;
- $m \geq n$
  - dacă $rang\ A = rang[A \mid b]$ soluţii clasice
  - dacă $rang\ A \neq rang[A \mid b]$ soluţii în sensul celor mai mici pătrate.

Vectorul reziduu şi problema LSP

Vectorul reziduu este definit prin:

$$r(\mathbf{x}) = \mathbf{b} - A\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m.$$

Vectorul $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ se numeşte *soluţie în sensul celor mai mici pătrate* pentru sistemul (2) dacă este soluţia următoarei probleme de optimizare:

$$\min \left\{ \|r(\mathbf{x})\|_2^2 = \|\mathbf{b} - A\mathbf{x}\|_2^2 \; ; \; \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \right\}. \tag{LSP}$$

Problema celor mai mici pătrate - Exemplu

Exemplu:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 2}, \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3,\ m = 3,\ n = 2.$$

$$rang\ A = 2 \neq rang\ [A \mid \mathbf{b}] = 3$$

Sistemul

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 = 0 \\ 2x_1 + 5x_2 = 0 \\ 3x_1 + 6x_2 = 1 \end{cases} \tag{3}$$

nu are soluţie clasică (nu există x_1, x_2 care să satisfacă toate cele 3 ecuaţii simultan).

Problema celor mai mici pătrate - Exemplu

Exemplu: *(continuare)*

Vectorul reziduu are forma

$$r(\mathbf{x}) = \mathbf{b} - A\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_1 - 4x_2 \\ -2x_1 - 5x_2 \\ 1 - 3x_1 - 6x_2 \end{pmatrix}.$$

Soluţia în sensul celor mai mici pătrate a acestui sistem este definită ca soluţia problemei de optimizare:

$$\min\{(-x_1 - 4x_2)^2 + (-2x_1 - 5x_2)^2 + (1 - 3x_1 - 6x_2)^2;\ x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}$$

$$\min\{1 - 6x_1 - 12x_2 + 64x_1x_2 + 14x_1^2 + 77x_2^2;\ x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}.$$

Această problemă de minimizare are soluţia:

$$x_1 = \frac{13}{18},\ x_2 = -\frac{2}{9},\ \|r(\mathbf{x})\|_2^2 = \frac{1}{6}$$

în sensul celor mai mici pătrate a sistemului (3).

Imaginea (range) matricei A este definită prin

$$range(A) = \left\{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m; \mathbf{y} = a_1 A^1 + a_2 A^2 + \ldots + a_n A^n, a_i \in \mathbb{R}, i = \overline{1, n}\right\},$$

unde $A^1, A^2, \ldots, A^n \in \mathbb{R}^m$ sunt coloanele matricei A,

$$A = \begin{bmatrix} A^1 & A^2 & \cdots & A^n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times n}.$$

Teorema celor mai mici pătrate

Teoremă

Fie $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, cu $m \geq n$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$. Un vector $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ minimizează norma euclidiană a vectorului reziduu

$$\|r(\mathbf{x})\|_2 = \|\mathbf{b} - A\mathbf{x}\|_2,$$

adică rezolvă problema (LSP), dacă şi numai dacă:

$$r(\mathbf{x}) \perp \mathrm{range}(A) \Longleftrightarrow A^T r(\mathbf{x}) = 0.$$

sau echivalent cu:

$$A^T A\mathbf{x} = A^T\mathbf{b}. \tag{4}$$

Sistemul (4) poartă numele de sistemul de **ecuaţii normale**.

Sistemul (4) este un sistem pătratic de dimensiune n, cu matricea sistemului $A^T A$ simetrică.

Teorema celor mai mici pătrate

Sistemul de ecuaţii normale (4) este nesingular dacă şi numai dacă *rang* $A = n$, în acest caz soluţia $\mathbf{x}$ a sistemului (4) este unică

$$\det A^T A \neq 0 \Leftrightarrow rang\ A = n.$$

Exemplu:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}, \quad A^T A = \begin{pmatrix} 14 & 32 \\ 32 & 77 \end{pmatrix}, \quad A^T \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{cases} 14x_1 + 32x_2 = 3 \\ 32x_1 + 77x_2 = 6 \end{cases} \Rightarrow x_1 = \frac{13}{18}, \quad x_2 = -\frac{2}{9}.$$

Pseudo-inversa matricei A

Presupunem că $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ are rangul egal cu numarul de coloane: $\mathrm{rang}(A) = n$.
Atunci pseudo-inversa Moore–Penrose poate fi definită prin:

$$A^+ = (A^TA)^{-1}A^T \in \mathbb{R}^{n\times m}.$$

Exemplu:

Pentru exemplul precedent, se poate arăta că

$$A^+ = \begin{bmatrix} 14 & 32 \\ 32 & 77 \end{bmatrix}^{-1} * \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

Este $A^+ = A^I$?.

Rezolvarea în sensul celor mai mici pătrate a unui sistem de ecuaţii liniare nepătratice

1. Folosind *factorizarea Cholesky* (descompunere LU) pentru matrice simetrice.

$$A^T A = LL^T,$$

unde $L \in \mathbb{R}^{n\times n}$ matrice inferior triunghiulară

Pași:

- Se calculează $A^T A$ și vectorul $A^T \mathbf{b}$;
- Se calculează factorizarea Cholesky a matricei $A^T A = LL^T$;
- Se rezolvă sistemul inferior triunghiular $L\mathbf{y} = A^T\mathbf{b}$ pentru $\mathbf{y}$;
- Se rezolvă sistemul superior triunghiular $L^T\mathbf{x} = \mathbf{y}$ pentru $\mathbf{x}$;

Rezolvarea în sensul celor mai mici pătrate a unui sistem de ecuaţii liniare nepătratice

2. Se calculează *descompunerea* QR(cu algoritmul lui Householder adaptat) pentru matricea A :

$$A = QR,$$

unde $Q \in \mathbb{R}^{m \times m}$ matrice ortogonală, iar $R \in \mathbb{R}^{m \times n}$, de forma

$$R = \begin{pmatrix} \overline{R} \in \mathbb{R}^{n \times n} \\ \mathbf{0}_{(m-n) \times n} \end{pmatrix},$$

cu $\overline{R}$ - matrice superior triunghiulară.

- Se calculează factorizarea QR modificată a matricei A;
- Se calculează vectorul $Q^T \mathbf{b}$;
- Se rezolvă sistemul triunghiular $\overline{R}\mathbf{x} = (Q^T \mathbf{b})_{i=1,n}$.

Rezolvarea în sensul celor mai mici pătrate a unui sistem de ecuaţii liniare nepătratice

3. Se foloseşte *descompunerea după valori singulare* a matricei A

$$A = U\Sigma V^T,\ \Sigma \in \mathbb{R}^{m\times n},\ U \in \mathbb{R}^{m\times m},\ V \in \mathbb{R}^{n\times n}.$$

- Se calculează SVD pentru matricea $A = U\Sigma V^T$;
- Se calculează vectorul $U^T\mathbf{b}$;
- Se rezolvă sistemul diagonal $\Sigma\mathbf{w} = U^T\mathbf{b}$ pentru $\mathbf{w}$;
- Soluţia este $\mathbf{x} = V\mathbf{w}$.

Observaţie: Dintre metodele **1.** , **2.** sau **3.** , se recomandă pentru utilizare metoda **2.**

Rezolvarea ecuaţiilor neliniare

Rezolvarea ecuațiilor neliniare

Fie $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ o funcție continuă pe intervalul $[a, b]$ astfel încât
$$f(a)f(b) < 0.$$
În aceste condiții, există $x^* \in (a, b)$ astfel încât
$$f(x^*) = 0.$$

În cele ce urmează ne propunem să aproximăm soluția x^* a ecuației neliniare:
$$f(x) = 0.$$

Rezolvarea ecuațiilor neliniare - Metoda bisecției

Metoda bisecției sau **metoda înjumătățirii intervalului**

Presupunem că:

$$f(a)f(b) < 0.$$

Pentru a aproxima soluția x^* căutată, vom construi un șir de intervale

$$\{[a_k, b_k]\ ;\ k \geq 0\},$$

care satisfac:

$$x^* \in [a_k, b_k], \quad [a_{k+1}, b_{k+1}] \subset [a_k, b_k],$$

$$b_{k+1} - b_k = \frac{b_k - a_k}{2}.$$

Rezolvarea ecuațiilor neliniare - Metoda bisecției

Pentru primul interval vom considera:

$$a_0 = a, \quad b_0 = b, \quad k = 0.$$

Considerăm punctul c de mijloc al intervalului $[a_k, b_k]$:

$$c = \frac{a_k + b_k}{2}.$$

Rezolvarea ecuațiilor neliniare - Metoda bisecției

Prin urmare, avem următoarele 3 variante:

1. $f(c) = 0$ – soluția căutată este $x^* = c$, algoritmul se oprește;
2. $f(a_k)f(c) < 0$ – soluția se găsește în intervalul (a_k, c), continuăm procedeul cu intervalul
$$[a_{k+1}, b_{k+1}] = [a_k, c];$$
3. $f(b_k)f(c) < 0$ – soluția se găsește în intervalul $x^* \in (c, b_k)$, procedeul continuă cu intervalul
$$[a_{k+1}, b_{k+1}] = [c, b_k].$$

Metoda bisecției – eroare

Dat $\varepsilon > 0$, există un interval $[a_{\bar{k}}, b_{\bar{k}}]$ astfel încât

$$x^* \in (a_{\bar{k}}, b_{\bar{k}})$$

și

$$b_{\bar{k}} - a_{\bar{k}} < \varepsilon, \quad \bar{k} > \log_2\left(\frac{b-a}{\varepsilon}\right).$$

Pentru ε suficient de mic, atât $a_{\bar{k}}$ cât și $b_{\bar{k}}$ pot fi considerate aproximații ale soluției x^*:

$$a_{\bar{k}} \approx x^* \quad \text{(prin lipsă) iar } b_{\bar{k}} \approx x^* \quad \text{(prin adaos).}$$