Descompunerea Cholesky

O matrice $A \in \mathbf{R}^{n \times n}$ se numeşte ***pozitiv definită*** dacă:

$$\left(Ax, x \right)_{\mathbf{R}^n} > 0 \quad \forall x \in \mathbf{R}^n, \; x \neq 0$$

Notaţie: $A > 0$

Fie $A \in \mathbf{R}^{n \times n}$ o matrice simetrică ($A = A^T$) şi pozitiv definită.

Descompunerea Cholesky pentru matricea A este de forma:

$$A = LL^T, \; L \text{ matrice inferior triunghiulară}$$

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = \boldsymbol{L}\boldsymbol{L}^T = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & l_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_{11} & l_{21} & \cdots & l_{n1} \\ 0 & l_{22} & \cdots & l_{n2} \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \cdots & l_{nn} \end{pmatrix}$$

Matricea $\boldsymbol{L}$ se calculează în $\boldsymbol{n}$ paşi, coloană după coloană.

Pas r $(r=1,\ldots,n)$

Se calculează elementele coloanei r a matricei L:
întâi elementul diagonal l_{rr} apoi
celelalte elemente l_{ir} $(i=r+1,\ldots n)$

Coloana r a matricei L:

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & l_{rr} & l_{r+1r} & \cdots & l_{ir} & \cdots & l_{nr} \end{pmatrix}^T$$

- se cunosc elementele primelor $(r-1)$ coloane ale matricei L

Calcul $\boldsymbol{l_{rr}}$:

$$a_{rr} = \left(LL^T\right)_{rr} = \begin{pmatrix} l_{r1} & \cdots & l_{rr-1} & l_{rr-1} & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_{r1} \\ \vdots \\ l_{rr-1} \\ l_{rr} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$= l_{r1}^2 + l_{r2}^2 + \cdots + l_{rr-1}^2 + l_{rr}^2 \quad \Rightarrow \quad l_{rr} = \pm\sqrt{a_{rr} - \sum_{k=1}^{r-1} l_{rk}^2}$$

Calcul l_{ir} *($i=r+1,\ldots,n$)*:

$$a_{ir} = \left(LL^T\right)_{ir} = \begin{pmatrix} l_{i1} & \cdots & l_{ir-1} & l_{ir} & \cdots & l_{ii} & \cdots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_{r1} \\ \vdots \\ l_{rr-1} \\ l_{rr} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$= l_{i1}l_{r1} + l_{i2}l_{r2} + \cdots + l_{ir-1}l_{rr-1} + l_{ir}l_{rr} \quad \Rightarrow \quad l_{ir} = \frac{\left(a_{ir} - \sum_{k=1}^{r-1} l_{ik}l_{rk}\right)}{l_{rr}}$$

Factorizarea Cholesky - numărul de operații efectuate:

A (adunări, scăderi):

$$\sum_{r=1}^{n}(n-r+1)(r-1)=\frac{n(n-1)(n+1)}{6}=\frac{1}{6}n^3+O(n^2)$$

M (înmulțiri, împărțiri):

$$\sum_{r=1}^{n}\left[(n-r)r+(r-1)\right]=\frac{n(n+4)(n-1)}{6}=\frac{1}{6}n^3+O(n^2)$$

Algoritmul de eliminare Gauss fără schimbare de ecuații $\Leftrightarrow$ descompunere LU

Presupunem că la fiecare pas al algoritmului de eliminare Gauss pivotul este nenul ($\boldsymbol{a_{rr}^{(r-1)} \neq 0}$), deci nu e nevoie de schimbare de ecuații.

Algoritmul se poate scrie astfel:

$$\textbf{for } r = 1,\ldots,n-1$$

$$\textbf{for } i = r+1,\ldots,n$$

- $f = -\dfrac{a_{ir}}{a_{rr}};$

$// \; E_i = E_i + f * E_r$

- $\textbf{for } j = r+1,\ldots,n$

  $$a_{ij} = a_{ij} + f * a_{rj};$$

- $a_{ir} = 0;$
- $b_i = b_i + f * b_r;$

Considerăm vectorul și matricea:

$$\boldsymbol{t}^{(r)} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \vdots \\ \mathbf{0} \\ t_{r+1}^{(r)} \\ \vdots \\ t_n^{(r)} \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^n \quad , \quad T_r := I_n + t^{(r)} e_r^T \in \mathrm{R}^{n \times n}$$

$$t^{(r)}e_r^T = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ t_{r+1}^{(r)} \\ \vdots \\ t_n^{(r)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 1 & 0 \cdots 0 \end{pmatrix} = \begin{array}{cc} \begin{array}{cccccc} & & & \text{col r} & & \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & t_{r+1}^{(r)} & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & & \\ 0 & 0 & \cdots & t_n^{(r)} & \cdots & 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \\ \\ \\ - \text{lin}\,(r+1) \\ \\ \\ \end{array} \end{array}$$

Matricea T_r este matrice triunghiulară inferior cu *1* pe diagonala principală:

$$
\begin{array}{c}
\qquad\qquad\quad \textbf{col } \boldsymbol{r} \\
\boldsymbol{T_r} = \begin{pmatrix}
\mathbf{1} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\
\mathbf{0} & \mathbf{1} & \cdots & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\
\vdots & & & & & \\
\mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{1} & \cdots & \mathbf{0} \\
\mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \boldsymbol{t_{r+1}^{(r)}} & \cdots & \mathbf{0} \\
\vdots & & & & & \\
\mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \boldsymbol{t_{n}^{(r)}} & \cdots & \mathbf{1}
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

Inversa matricei $\boldsymbol{T_r}$ este

$$T_r^{-1} = I_n - t^{(r)} e_r^T \ .$$

$$T_r\, T_r^{-1} = (I_n + t^{(r)} e_r^T)(I_n - t^{(r)} e_r^T) = I_n - t^{(r)} e_r^T + t^{(r)} e_r^T - t^{(r)} e_r^T t^{(r)} e_r^T =$$
$$= I_n - t^{(r)}\, t_r^{(r)} e_r^T = I_n \quad (0 = t_r^{(r)} = e_r^T t^{(r)})$$

Dacă $\boldsymbol{A}$ este o matrice oarecare, vrem să vedem cum se poate construi matricea $\boldsymbol{B=T_r A}$ fără a face înmulțire matricială. Vom studia legătura între liniile matricelor $\boldsymbol{A}$ și $\boldsymbol{B}$.

$$e_i^T B = e_i^T (T_r A) = e_i^T (I_n + t^{(r)} e_r^T) A = e_i^T A + e_i^T t^{(r)} e_r^T A =$$
$$= e_i^T A + t_i^{(r)} (e_r^T A)$$

Linia $\boldsymbol{i}$ a noii matrice $\boldsymbol{B}$ se obține din linia $\boldsymbol{i}$ a matricei $\boldsymbol{A}$ la care se adaugă linia $\boldsymbol{r}$ a matricei $\boldsymbol{A}$ înmulțită cu factorul $t_i^{(r)}$.

$$e_i^T B = \begin{cases} e_i^T A & i = 1,\ldots,r \ (t_i^{(r)} = 0) \\ e_i^T A + t_i^{(r)}(e_r^T A) & i = r+1,\ldots,n \end{cases}.$$

Operația $\boldsymbol{T_r A}$ descrie Pasul $\boldsymbol{r}$ al algoritmului de eliminare Gauss dacă:

$$t_{r+1}^{(r)} = -\frac{a_{r+1r}^{(r)}}{a_{rr}^{(r)}},\cdots,t_i^{(r)} = -\frac{a_{ir}^{(r)}}{a_{rr}^{(r)}},\cdots,t_n^{(r)} = -\frac{a_{nr}^{(r)}}{a_{rr}^{(r)}}.$$

Algoritmul de eliminare Gauss fără schimbare de ecuații poate fi descris astfel:

$$T_{n-1}\cdots T_2 T_1 A = U \quad \text{cu} \quad T_r = I_n + t^{(r)} e_r^T \,,$$

$$t^{(r)} = \left(0 \ \cdots 0 \ \left(-\frac{a_{r+1r}^{(r)}}{a_{rr}^{(r)}}\right) \ \cdots \left(-\frac{a_{ir}^{(r)}}{a_{rr}^{(r)}}\right) \ \cdots \left(-\frac{a_{nr}^{(r)}}{a_{rr}^{(r)}}\right) \right)^T .$$

Avem:

$$A = T_1^{-1} T_2^{-1} \cdots T_{n-1}^{-1} U = LU \ , \quad L := T_1^{-1} T_2^{-1} \cdots T_{n-1}^{-1}$$

$$T_1^{-1}T_2^{-1} = (I_n - t^{(1)}e_1^T)(I_n - t^{(2)}e_2^T) = I_n - t^{(1)}e_1^T - t^{(2)}e_2^T + t^{(1)}e_1^T t^{(2)}e_2^T =$$

$$= I_n - t^{(1)}e_1^T - t^{(2)}e_2^T + t^{(1)}t_1^{(2)}e_2^T = I_n - t^{(1)}e_1^T - t^{(2)}e_2^T \quad (t_1^{(2)} = 0)$$

Prin inducție se arată că:

$$L = T_1^{-1}T_2^{-1}\cdots T_{n-1}^{-1} = I_n - t^{(1)}e_1^T - t^{(2)}e_2^T - \cdots - t^{(n-1)}e_{n-1}^T$$

$$
L=\begin{pmatrix}
1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\
\dfrac{a_{21}}{a_{11}} & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\
\dfrac{a_{31}}{a_{11}} & \dfrac{a_{32}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & & & & & \\
\dfrac{a_{r1}}{a_{11}} & \dfrac{a_{r2}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\
\dfrac{a_{r+11}}{a_{11}} & \dfrac{a_{r+12}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} & \cdots & \dfrac{a_{r+1r}^{(r-1)}}{a_{rr}^{(r-1)}} & \cdots & 0 \\
\vdots & & & & & \\
\dfrac{a_{n1}}{a_{11}} & \dfrac{a_{n2}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} & \cdots & \dfrac{a_{nr}^{(r-1)}}{a_{rr}^{(r-1)}} & \cdots & 1
\end{pmatrix}
$$

Descompuneri *QR*

Definiție

Se numește ***matrice ortogonală***, o matrice $Q \in \mathbf{R}^{n\,x\,n}$ care satisface relația:

$$Q^T Q = Q Q^T = I_n \quad (Q^{-1} = Q^T)\ .$$

Matricele ortogonale au următoarele proprietăți:

- Dacă Q este matrice ortogonală atunci şi matricea transpusă Q^T este ortogonală.

$$Q^T Q = Q^T (Q^T)^T = Q Q^T = (Q^T)^T Q^T = I_n$$

- Dacă Q_1 şi Q_2 sunt matrice ortogonale atunci Q_1Q_2 este tot matrice ortogonală.

$$(Q_1Q_2)^T(Q_1Q_2) = Q_2^T Q_1^T Q_1 Q_2 = Q_2^T I \, Q_2 = I_n$$
$$(Q_1Q_2)(Q_1Q_2)^T = Q_1Q_2Q_2^T Q_1^T = Q_1^T I \, Q_1 = I_n$$

- Dacă $Q \in \mathrm{R}^{n\times n}$ este matrice ortogonală şi $x \in \mathbf{R}^n$ atunci $\| Qx \|_2 = \| x \|_2$.

$$\| Qx \|_2^2 = \left(Qx, Qx\right) = \left(x, Q^T Qx\right) = \left(x, x\right) = \| x \|_2^2, \quad \| \cdot \|_2 \geq 0 \Rightarrow$$
$$\| Qx \|_2 = \| x \|_2$$

Fie $\boldsymbol{A}$ o matrice reală pătratică de dimensiune $\boldsymbol{n}$. Pp. că avem:

$$\boldsymbol{A = QR}$$

unde $\boldsymbol{Q}$ este o matrice ortogonală iar $\boldsymbol{R}$ este o matrice superior triunghiulară.

$$\boldsymbol{Ax = b} \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{QRx = b} \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{Q^T QRx = Q^T b} \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{Rx = Q^T b}$$