Algebră Liniară și Optimizare
Curs 2

Anca Ignat & Corina Forăscu

Pagina web: https://edu.info.uaic.ro/algebra-liniara/

Discord: https://discord.gg/eGQYadYH

bitly

Motivații

Linear algebra is the language of modern applied mathematics.

Gilbert Strang (MIT), “regele” algebrei liniare moderne

👍 Rețelele neuronale, embedding-urile, transformările liniare — toate vorbesc „matrice și vectori”. Practic, fără algebra liniară, AI-ul rămâne mut.

Motivații

The purpose of computing is insight, not numbers.

Richard Hamming – Matematician & pionier în calcul numeric

👍 Algebra liniară și optimizarea nu sunt despre calcule mecanice — sunt despre înțelegerea structurii datelor și găsirea celor mai bune soluții.

Recap. curs 1

Exemple practice

1. Traficul și sistemele liniare
2. Centralitatea în rețelele sociale
3. Compresia imaginilor digitale şi descompunerea după valori singular (SVD)

Noțiuni introductive ($\approx$ recap.) despre vectori și matrice:

operații cu vectori și matrice

tipuri de matrice elementare

Structură curs 2

1. Produse scalare
2. Norme vectoriale și matriceale
3. Istoria rezolvării sistemelor liniare

Produse scalare

Se numește ***produs scalar*** în spațiul vectorial X funcția cu două argumente

$$(\cdot,\cdot): X \times X \to K$$

care satisface condițiile:

$$(a)\ (x,x) \geq 0, \forall\, x \in X, \quad (x,x) = 0 \;\Leftrightarrow\; x = 0;$$

$$(b)\ (x,y) = \overline{(y,x)}, \forall\, x, y \in X,$$

$$(c)\ (\lambda x, y) = \lambda (x,y), \forall\, x, y \in X, \forall \lambda \in K,$$

$$(d)\ (x+y, z) = (x,z) + (y,z), \forall\, x, y, z \in X.$$

Produse scalare - exemple

Fie vectorii x, y cu ajutorul cărora definim produsele scalare în spațiile $\mathbf{C}^n$ şi $\mathbf{R}^n$:

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbf{C}^n, \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbf{C}^n$$

$$(x, y) = \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y_i} = y^H x = \begin{pmatrix} \overline{y_1} & \overline{y_2} & \cdots & \overline{y_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Produse scalare - exemple

$$x=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^n,\ y=\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^n$$

$$(x,y)=\sum_{i=1}^{n} x_i y_i = y^T x = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Produse scalare – proprietăți

Fie $A \in \mathbb{C}^{m\times n}, x \in \mathbb{C}^n, y \in \mathbb{C}^m$ (cazul complex)

Atunci are loc egalitatea:

$$\left(Ax, y\right)_{\mathbf{C}^m} = \left(x, A^H y\right)_{\mathbf{C}^n}.$$

Pentru cazul real are loc egalitatea corespunzătoare:

$$A \in \mathbf{R}^{m\times n},\; x \in \mathbf{R}^n, y \in \mathbf{R}^m \Rightarrow \left(Ax, y\right)_{\mathbf{R}^m} = \left(x, A^T y\right)_{\mathbf{R}^n}$$

Demonstrație:

$$(Ax, y) = y^H (Ax) = y^H A x = y^H (A^H)^H x = (A^H y)^H x =$$

$$= (x, A^H y).$$

Norme

Fie $\boldsymbol{X}$ un spațiu vectorial real. Se numește **normă** aplicația:

$$\|\,.\,\| : X \to \mathbf{R}_+$$

care îndeplinește condițiile:

$$\textbf{(1)}\ \ \|x\| \geq 0; \quad \|x\| = 0 \ \Leftrightarrow \ x = 0;$$

$$\textbf{(2)}\ \ \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|, \forall\, x, y \in X;$$

$$\textbf{(3)}\ \ \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|, \forall\, x \in X, \forall \lambda \in \mathbf{R}.$$

Vom numi ***norme vectoriale*** normele definite pe spațiile n-dimensionale complex $\mathbb{C}^n$ sau real $\mathbb{R}^n$.

Norme - exemple

Fie spațiile vectoriale complex $\mathbb{C}^n$ și real $\mathbb{R}^n$. Pe aceste spații următoarele aplicații sunt norme vectoriale:

$$\|\boldsymbol{x}\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |\boldsymbol{x}_i| \text{ – city-block (Manhattan)}$$

$$\|\boldsymbol{x}\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |\boldsymbol{x}_i|^2} \text{ – euclidiană}$$

$$\|\boldsymbol{x}\|_\infty = \mathbf{max}\{|\boldsymbol{x}_i|, \boldsymbol{i} = \mathbf{1..}\boldsymbol{n}\} \text{ – Cebyshev (a tablei de şah)}$$

Dacă $\|\,.\,\|_v$ este o normă vectorială în $\mathbb{R}^n$ şi $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ este o matrice pătratică nesingulară ($\det P \neq 0$) atunci aplicația:

$\|\cdot\|_P : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, definită prin $\|x\|_{v,P} = \|P \cdot x\|_v$ este, de asemenea, o normă vectorială (demonstrați!).

Norme euclidiene

Într-un spațiu vectorial X dotat cu produs scalar $(\cdot,\cdot)$ se poate defini o ***normă*** indusă de produsul scalar, numită ***euclidiană*** prin:

$$\|x\|_2 = |x| := \sqrt{(x,x)}$$

Folosind produsele scalare în $\mathbb{C}^n$ și $\mathbb{R}^n$ anterior definite,

$$(x\,,y)_{\mathrm{C}^n} = \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y_i} \quad , \quad (x\,,y)_{\mathrm{R}^n} = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

obținem norma euclidiană în spațiile $\mathbb{C}^n$ și $\mathbb{R}^n$.

$$\|x\|_2 = |x| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2}$$

Inegalitatea *Cauchy-Buniakovski-Schwarz*:

$$|(x\,,y)| \le \sqrt{(x\,,x)}\sqrt{(y,y)} \quad \forall x,y \in X$$

Norme matriciale

Aplicația $\|\cdot\|: \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}_+$ se numește ***<u>normă matriceală</u>*** dacă îndeplinește condițiile:

(1) $\|\boldsymbol{A}\| \geq 0, \forall A \in \mathbb{R}^{n\times n}$; $\|\boldsymbol{A}\| = \mathbf{0} \Leftrightarrow \boldsymbol{A} = \mathbf{0}$.

(2) $\|\alpha \boldsymbol{A}\| = |\alpha| \|\boldsymbol{A}\|, \forall \alpha \in \mathbf{R}, \forall \boldsymbol{A} \in \mathbf{R}^{n\times n}$.

(3) $\|\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}\| \leq \|\boldsymbol{A}\| + \|\boldsymbol{B}\|, \forall \boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in \mathbf{R}^{n\times n}$.

(4) $\|\boldsymbol{A} * \boldsymbol{B}\| \leq \|\boldsymbol{A}\| \cdot \|\boldsymbol{B}\|, \forall \boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in \mathbf{R}^{n\times n}$.

Norme matriciale - exemple

Aplicația, numită ***<u>normă Frobenius</u>***, definită de relația

$$\|A\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|a_{i\,j}|^2}$$

este o normă matriceală (unde $A = \left(a_{ij}\right)_{i,j=\overline{1,n}}$).

Aplicația definită de relația

$$\|A\|_{\max} = \max\{|a_{ij}|\,;\, i = 1,\ldots,n,\ j = 1,\ldots,n\}$$

<u>NU</u> este o normă matricială (urmează contra-exemplu)

Norme matriciale – contra-exemplu

Pentru $\boldsymbol{n}$ = 2 alegem matricile pătratice $\boldsymbol{A}$ și $\boldsymbol{B}$:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, B = A^T = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

Folosind definiția aplicației $\|\cdot\|_{max}$ de mai sus, calculăm produsul matricilor și așa-zisele „norme” ale acestora:

$$A * B = I_2 \ , \|A\|_{\max} = \|B\|_{\max} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Verificând proprietatea (4) a unei norme matriciale, aceasta nu este îndeplinită:

$$\|A * B\|_{\max} = 1 > \|A\|_{\max} \bullet \|B\|_{\max} = \frac{1}{2}$$

Norme matriciale naturale

Dacă $\|\cdot\|_v : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$ este o normă vectorială în $\mathbb{R}^n$, atunci aplicația $\|\cdot\|_i : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}_+$ definită prin

$$\|A\|_{\mathrm{i}} = \max\{\frac{\|Ax\|_{\mathrm{v}}}{\|x\|_{\mathrm{v}}} \,;\, x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0\}$$

este o normă, numită ***normă matriceală naturală*** sau ***indusă*** de norma vectorială.

Definiții echivalente:

$$\|A\|_{\mathrm{i}} = \max\{\|Ax\|_{\mathrm{v}} \;;\, x \in \mathbb{R}^n, \|x\|_{\mathrm{v}} \leq 1\}$$

$$= \max\{\|Ax\|_{\mathrm{v}} \;;\, x \in \mathbb{R}^n, \|x\|_{\mathrm{v}} = 1\}$$

Are loc următoarea relaţie între norma vectorială și cea matricială indusă:

$$\|Ax\|_{\mathrm{v}} \leq \|A\|_{\mathrm{i}} \|x\|_{\mathrm{v}}, \forall A \in \mathbb{R}^{n\times n}, \forall x \in \mathbb{R}^n$$

Norme matriciale naturale – exemple

Norma vectorială	Norma matricială indusă
$\lVert x \rVert_1 = \sum_{i=1}^{n} \lvert x_i \rvert$	$\lVert A \rVert_1 = \max\{\sum_{i=1}^{n} \lvert a_{ij} \rvert \,;\, j = 1,2,\ldots,n\}$
$\lVert x \rVert_\infty = \max\{\lvert x_i \rvert \,;\, i = 1,\ldots,n\}$	$\lVert A \rVert_\infty = \max\{\sum_{j=1}^{n} \lvert a_{ij} \rvert \,;\, i = 1,2,\ldots,n\}$

Norme matriciale naturale

Dacă $\|\cdot\|_v$ și $\|\cdot\|_{v,P}$ sunt norme vectoriale în $\mathbb{R}^n$, iar $\|\cdot\|_i$ și $\|\cdot\|_{i,P}$ sunt normele matriciale induse, atunci determinăm legătura dintre normele $\|\cdot\|_i$ și $\|\cdot\|_{i,P}$.

$$
\begin{array}{ccc}
\|\cdot\|_{\mathrm{v}} & \rightarrow & \|\cdot\|_{\mathrm{i}} \\
\downarrow & & ? \\
\|\cdot\|_{\mathrm{v,P}} & \rightarrow & \|\cdot\|_{\mathrm{i,P}}
\end{array}
\qquad
\|A\|_{\mathrm{i}} = \max\{ \frac{\|Ax\|_{\mathrm{v}}}{\|x\|_{\mathrm{v}}} \,;\, x \in \mathbb{R}^n \,,\, x \neq 0\}
$$

Au loc: $\|x\|_{v,P} = \|Px\|_v$.

Calculând $\|A\|_{i,P}$ obținem

$$\|A\|_{i,P} = \max_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|_{v,P}}{\|x\|_{v,P}} =$$

$$= \max_{x\neq 0} \frac{\|PAx\|_v}{\|Px\|_v} \underset{y=Px}{\longleftrightarrow} \max_{y\neq 0} \frac{\|PAP^{-1}y\|_v}{\|y\|_v} = \|PAP^{-1}\|_i$$

Norme matriciale naturale

Considerând $P = diag[p_1, p_2, \cdots, p_n]$, cu $p_i > 0, \forall i = \overline{1, n}$, obținem $PAP^{-1} = \left(\frac{p_i}{p_j} a_{ij}\right)_{i,j=\overline{1,n}}$

Astfel, în norma operatorială $\|A\|_{i,P} = \|PAP^{-1}\|_i$ elementele a_{ij} din A devin $\frac{p_i}{p_j} a_{ij}$.

Schimbarea normei vectoriale printr-o matrice diagonală P ($\|x\|_{v,P} = \|Px\|_v$ - o schimbare a sistemului de coordonate prin P) induce asupra matricei A transformarea $\|A\|_{i,P} = \|PAP^{-1}\|_i$, deci norma matricială indusă, $\|A\|_{i,P}$, devine norma veche aplicată matricei similare PAP^{-1}- o transformare prin similaritate.

- ✓ Estimări de norme, alegerea ponderilor p_i pentru a micșora norma

Normă spectrală: definiții (recap)

Fie $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ o matrice pătratică nesingulară.

Se numeşte ***valoare proprie*** (***autovaloare***) a matricei A un număr complex $\lambda \in \mathbb{C}$ pentru care $\exists x \in \mathbb{C}^n, x \neq 0$, a.î. $Ax = \lambda x$.
Vectorul $\boldsymbol{x}$ se numeşte ***vector propriu*** (***autovector***) asociat valorii proprii λ.

$$\boldsymbol{Ax = \lambda x \quad \Leftrightarrow \quad (\lambda I_n - A)x = 0, x \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \det(\lambda I_n - A) = 0}$$

Deci matricea $(\lambda I_n - A)$ este nesingulară.

Polinomul

$$\boldsymbol{p_A(\lambda) = \det(\lambda I_n - A) = \lambda^n - a_1\lambda^{n-1} - a_2\lambda^{n-2} - \ldots - a_{n-1}\lambda - a_n}$$

se numeşte ***polinom caracteristic*** asociat matricei $\boldsymbol{A}$.

grad $grad\ p_A(\lambda) = \boldsymbol{n}$, deci $p_A(\lambda)$ are $\boldsymbol{n}$ rădăcini, care sunt cele $\boldsymbol{n}$ valori proprii ale matricei $\boldsymbol{A}$.

Normă spectrală

Fie $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ o matrice pătratică nesingulară.

Se numeşte ***rază spectrală*** a matricei A numărul complex

$$\varrho(A) = max\{|\lambda_i| \,\big|\, \lambda_i \text{ valorile proprii ale matricei } A, i = \overline{1,n}\}.$$

Pentru norma euclidiană $\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}|x_i|^2} = \sqrt{x^T x}$

norma matricială indusă este

$$\|A\|_2 = \max_{x\neq 0}\frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2} = \max_{x\neq 0}\sqrt{\frac{\|x^T A^T Ax\|_2}{\|x^T x\|_2}} = \sqrt{\rho(A^T A)}$$

și se numește ***norma spectrală*** - măsoară cât de mult poate o matrice să „întindă” un vector.

Propoziție.

Fie $\|\cdot\|$ o normă matriceală naturală.

Atunci $\varrho(A) \leq \|A\|, \forall A \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

Istoria rezolvării sistemelor liniare

- 1900 -1800 î.e.n., Babilon: apar primele probleme legate de ecuaţii liniare simultane

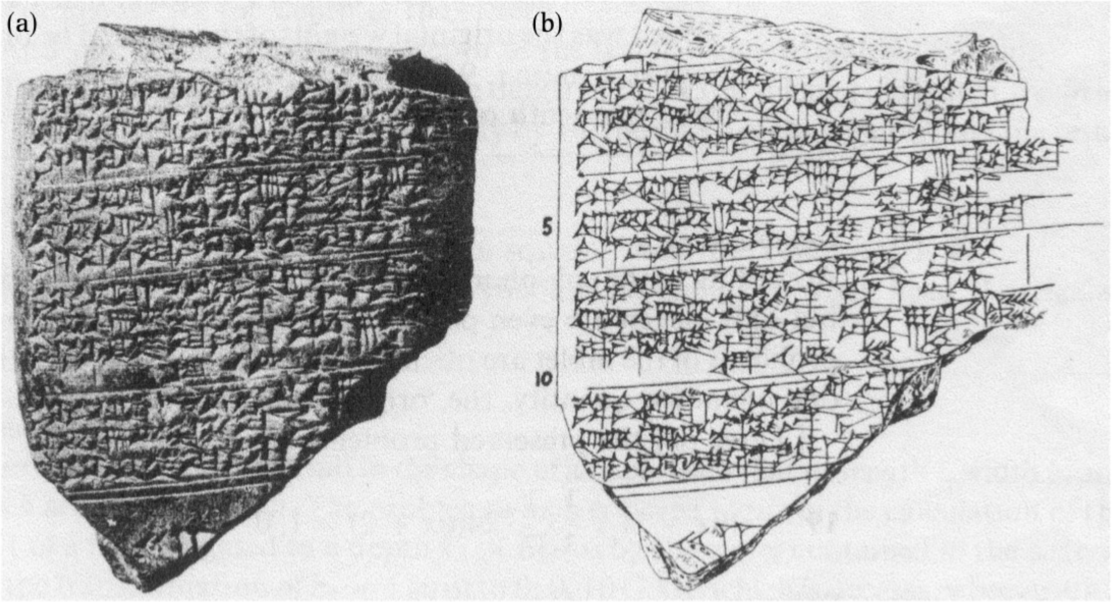


Fig. 3 The 'stone-weighing' tablet YBC4652; (a) photograph and (b) line drawing.

$$8x + 3 + \frac{21}{39}(8x + 3) = 60$$

From Akkadian to English:
I found a stone, (but) did not weigh it; (after) I weighed (out) 8 times its weight, added 3 gín one-third of one-thirteenth I multiplied by 21, added (it), and then
I weighed (it): 1 ma-na. What was the origin(al weight) of the stone? The origin(al weight) of the stone was 4 1/2 gín./// we consider 1 ma-na = 60 gín
(credits: https://uruk-warka.dk/mathematics/Babylonian%20Mathematics.pdf)

Istoria rezolvării sistemelor liniare

- 2000-1600 î.e.n. Babilon: tăbliţă cu următoarea problemă:

Figure 1. It began in cuneiform tablets like VAT 8389. Vorderasiatisches Museum in Berlin, 12.1 by 7.9 cm.

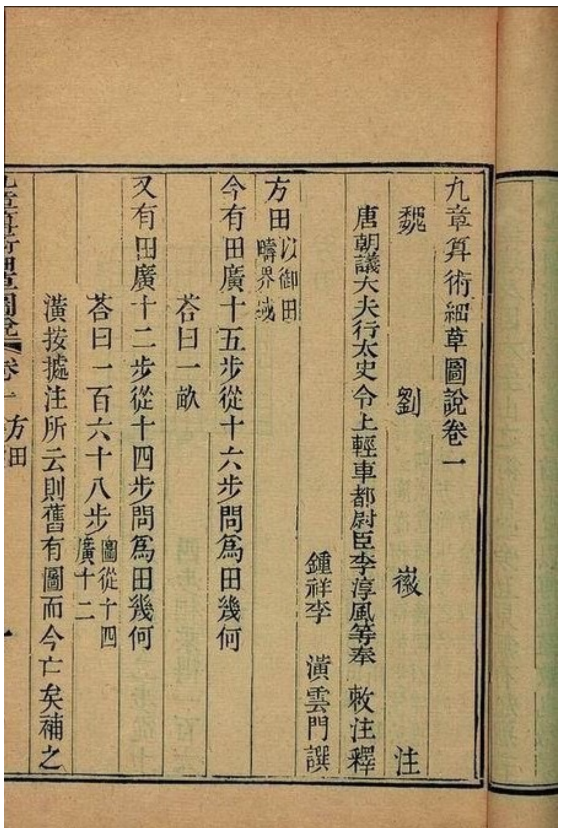
” The first problem on VAT 8389 asks for the areas of two fields whose total area is 1800 sar, when the rent for one field is 2 silà of grain per 3 sar, the rent for the other is 1 silà per 2 sar, and the total rent on the first exceeds the other by 500 silà.”

$$\begin{aligned} x + y &= 1800 \\ \frac{2}{3}\cdot x - \frac{1}{2}\cdot y &= 500 \end{aligned}$$

(credits: https://www.cis.upenn.edu/~cis6100/Notices-06-11-Gausselim.pdf , https://scispace.com/pdf/how-ordinary-elimination-became-gaussian-elimination-28mefp2w6b.pdf)

Istoria rezolvării sistemelor liniare

- 900-100 î.e.n. China: „*Jiuzhang suanshu - 9 capitole despre arta matematică*” – cap. Fangcheng descrie o metodă cu bețișoare de numărat care este, în esență, eliminare de tip Gauss pe „tablouri” de coeficienți (un fel de matrice/tablă de calcul)



九章算術細草圖說卷一
魏 劉 徽 注
唐朝議大夫行太史令上輕車都尉臣李淳風等奉 敕注釋
鍾祥李 潢雲門譔
方田 以御田疇界域
今有田廣十五步從十六步問爲田幾何
荅曰一畝
又有田廣十二步從十四步問爲田幾何
荅曰一百六十八步 圖從十四廣十二
潢按據注所云則舊有圖而今亡矣補之

” Avem 3 tipuri de orez. Ştim că

- *3 baloturi din primul tip, 2 baloturi din al doilea tip şi 1 balot din al treilea tip cântăresc 39 măsuri.*
- *De asemenea, 2 baloturi din primul tip, 3 baloturi din al doilea tip şi 1 balot din al treilea tip cântăresc 34 măsuri şi*
- *1 balot din primul tip, 2 baloturi din al doilea tip şi 3 baloturi din al treilea tip cântăresc 26 măsuri.*

Câte măsuri cântăreşte un balot din fiecare tip de orez”

Istoria rezolvării sistemelor liniare

- 230-270 e.n., Diophantus din Alexandria, în „*Arithmetica*”: contribuie printr-un stil mai „algebric” și simbolic (util pentru formularea problemelor), chiar dacă tradiția lui e mai mult despre ecuații/necunoscute în contexte aritmetice.

$$\mathrm{K}^{\upsilon}\overline{\alpha}\,\zeta\overline{\iota}\ \pitchfork\ \Delta^{\upsilon}\overline{\beta}\,\mathrm{M}\overline{\alpha}\ \text{ἴσ}\ \mathrm{M}\overline{\varepsilon}$$

$$x^3 1 x 10 - x^2 2 x^0 1 = x^0 5$$

$$(x^3 1 + x 10) - (x^2 2 + x^0 1) = x^0 5$$

Istoria rezolvării sistemelor liniare

- 1545, Cardan în *Ars Magna:* propune o regulă (*regula de modo*) pentru rezolvarea unui sistem de 2 ecuaţii cu 2 necunoscute (seamănă cu regula lui Cramer)
- 1683, Seki Kowa, Japonia: ideea de „*determinant*” în „*Method of solving the dissimulated problems*”. Calculează ceea ce astăzi cunoaştem sub numele de determinant, determinanţii matricelor ***2x2***, ***3x3***, ***4x4***, ***5x5*** în legătură cu rezolvarea unor ecuaţii dar nu a sistemelor de ecuaţii.

Istoria rezolvării sistemelor liniare

- 1683, Gottfried Leibniz într-o scrisoare către Guillaume de l'Hôpital explică faptul că sistemul de ecuaţii:

$$10 + 11x + 12y = 0$$

$$20 + 21x + 22y = 0$$

$$30 + 31x + 32y = 0$$

are soluţie deoarece :

10*21*32 + 11*22*30 + 12*20*31 =
= 10*22*31 + 11*20*32 + 12*21*30

(condiţia ca determinantul matricei coeficienţilor să fie 0)

Istoria rezolvării sistemelor liniare

- Leibniz era convins că o notaţie matematică bună este cheia progresului şi experimentează mai mult de 50 de moduri diferite de a scrie coeficienţii unui sistem de ecuaţii. Leibniz foloseşte termenul de „*rezultant*” în loc de determinant şi a demonstrat regula lui Cramer pentru „rezultanţi”. Ştia că orice determinant poate fi dezvoltat în raport cu o coloană – operaţia se numeşte azi *dezvoltarea Laplace*.

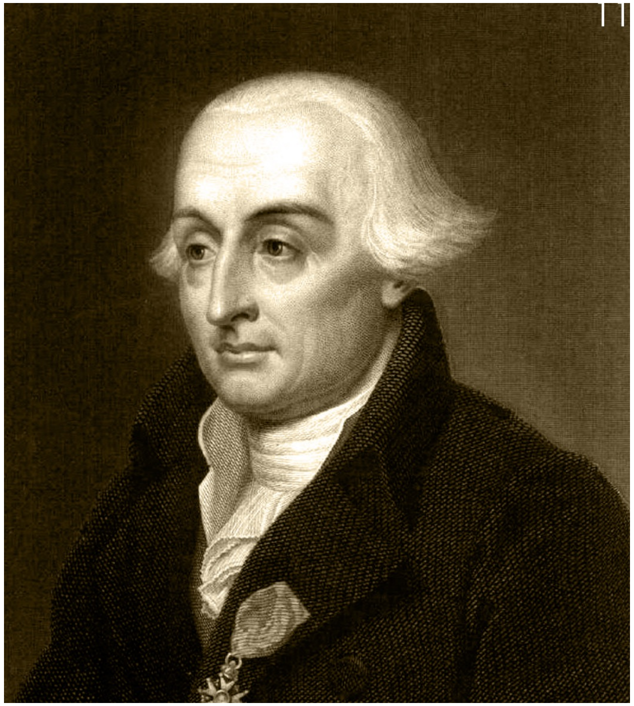
Istoria rezolvării sistemelor liniare

- 1750, Gabriel Cramer prezintă o formulă bazată pe determinanţi pentru rezolvarea unui sistem de ecuaţii liniare – *regula lui Cramer* – *„Introduction in the analysis of algebraic curves”*; dă o regulă generală pentru sisteme *n x n:*

  „One finds the value of each unknown by forming ***n*** *fractions of which the common denominator has as many terms as there are permutations of* ***n*** *things”*
- 1764 Bezout, 1771 Vandermonde, 1772 Laplace: reguli de calcul al determinanţilor

Istoria rezolvării sistemelor liniare

- 1773 Joseph-Louis Lagrange (Giuseppe Lodovico Lagrangia): prima utilizare implicită a matricelor în legătură cu formele biliniare ce apar la optimizarea unei funcţii reale de 2 sau mai multe variabile (dorea să caracterizeze punctele de maxim şi minim a funcţiilor de mai multe variabile)



Istoria rezolvării sistemelor liniare

- 1800-1801, Carl Friedrich Gauss introduce noţiunea de „*determinant”* (determină proprietăţile formei pătratice) – *Disquisitiones arithmeticae(1801)*; descrie operaţiile de înmulţire matricială şi inversă a unei matrice în contextul tabloului coeficienţilor unei forme pătratice. Gauss dezvoltă *eliminarea Gaussiană* pe când studia orbita asteroidului Pallas de unde obţine un sistem liniar cu 6 ecuaţii cu 6 necunoscute.
- 1805 (Adrien-Marie Legendre) & 1809 (Gauss): apar nevoi „practice” (astronomie/geodezie) care popularizează rezolvarea sistemelor supradeterminate prin *metoda celor mai mici pătrate*, ducând la sisteme liniare („ecuațiile normale”) rezolvate eficient prin eliminare.

Istoria rezolvării sistemelor liniare

- 1812, Augustin-Louis Cauchy foloseşte termenul de „*determinant*” în sensul cunoscut azi.
- 1826, Cauchy găsește valorile proprii şi deduce rezultate legate de diagonalizarea unei matrice. Introduce noțiunea de *matrice asemenea* şi demonstrează ca acestea au aceeași ecuație caracteristică. Demonstrează că orice matrice reală simetrică este diagonalizabilă.

Istoria rezolvării sistemelor liniare

- 1850, James Joseph Sylvester introduce pentru prima data termenul de ***matrice*** (din latină, „uter” – un loc unde ceva se formează sau este produs, „*an oblong arrangement of terms*”)

  „*I have in previous papers defined a "Matrix" as a rectangular array of terms, out of which different systems of determinants may be engendered from the womb of a common parent.*”
- 1855, Arthur Cayley („*A Memoir on the Theory of Matrice*”): algebră matricială, prima definiţie abstractă a unei matrice. Studiază transformările liniare şi compunerea lor ceea ce îl conduce la operaţiile cu matrice (adunare, înmulţire, înmulţirea cu un scalar, inversa)

Istoria rezolvării sistemelor liniare

- 1850, James Joseph Sylvester introduce pentru prima data termenul de ***matrice*** (din latină, „uter” – un loc unde ceva se formează sau este produs, „*an oblong arrangement of terms*”)

  „*I have in previous papers defined a "Matrix" as a rectangular array of terms, out of which different systems of determinants may be engendered from the womb of a common parent.*”

- 1855, Arthur Cayley („*A Memoir on the Theory of Matrice*”): algebră matricială, prima definiţie abstractă a unei matrice. Studiază transformările liniare şi compunerea lor ceea ce îl conduce la operaţiile cu matrice (adunare, înmulţire, înmulţirea cu un scalar, inversa)

  „Sunt multe lucruri de spus despre această teorie a matricelor şi, după părerea mea, această teorie ar trebui să preceadă teoria determinanţilor”

Istoria rezolvării sistemelor liniare

- 1870, Marie Ennemond Camille Jordan: forma canonică Jordan, în „*Traité des substitutions et des équations algebraique*”
- 1874, Philipp Ludwig von Seidel (cu o menţiune anterioară într-o scrisoare a lui Gauss, 1823) – metoda Gauss–Seidel, un pas major spre metode iterative pentru sisteme mari, în „*On a process for solving by successive approximation the equations to which the method of least squares leads as well as linear equations generally*” (în germană)
- 1878, Ferdinand Georg Frobenius: rangul unei matrici, în „*Über lineare Substitutionen und bilineare Formen*”
- 1890, Karl Weierstrass: definiţia axiomatică a determinantului, în „*On determinant theory*”

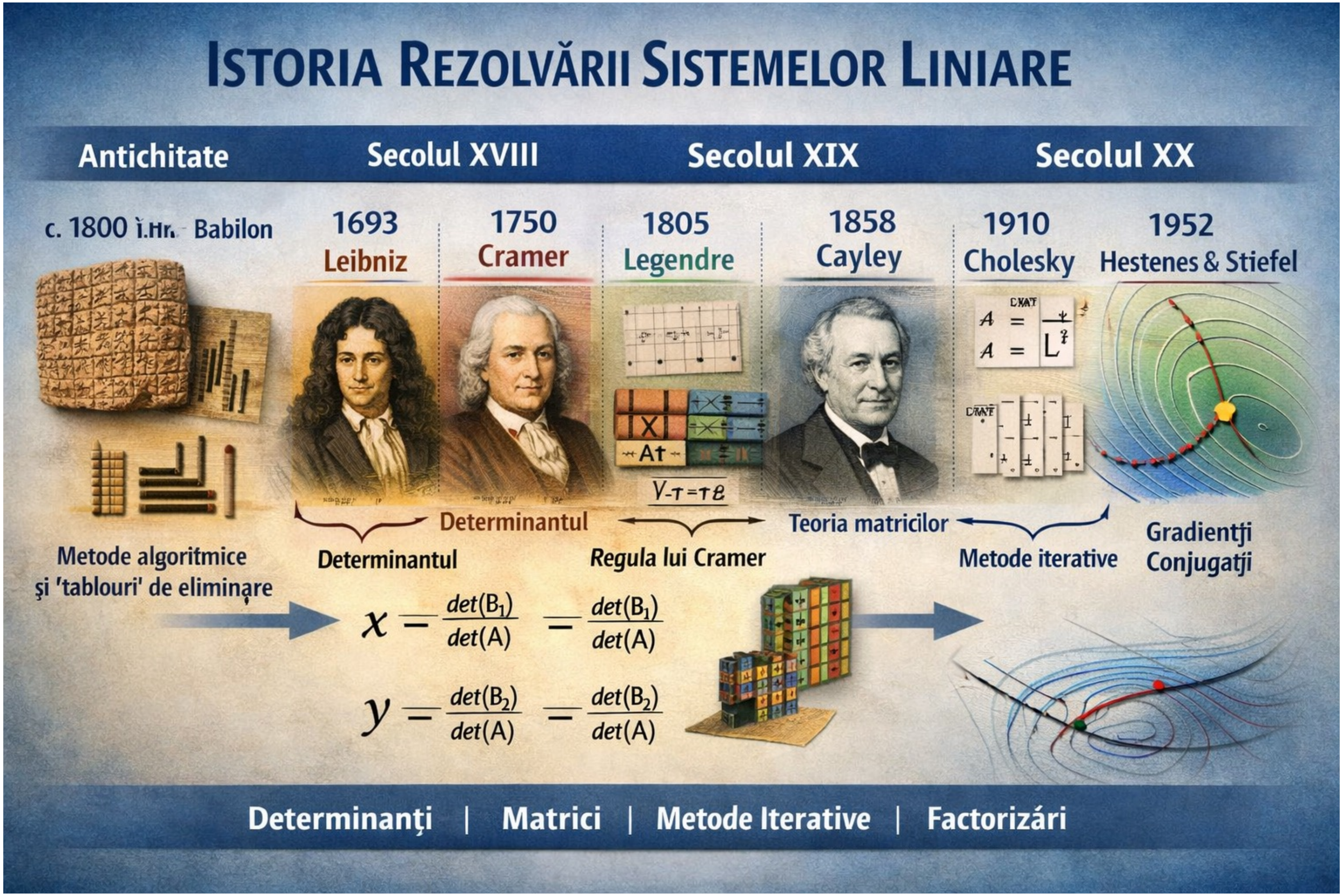
Istoria rezolvării sistemelor liniare

- 2 dec. 1910 (publicat postum 1924), André-Louis Cholesky: factorizarea Cholesky pentru matrici simetrice pozitiv definite, extrem de eficientă pentru rezolvarea $\boldsymbol{Ax=B}$ în acest caz
- 1925, Heisenberg reinventează algebra matricială pentru mecanica cuantică
- 1947, vonNeuman & Goldstine: numerele de condiţionare atunci când analizează erorile de rotunjire
- 1948, Turing: descompunerea *LU* a unei matrice
- 1952, Hestenes & Stiefel: metoda gradienților conjugați, crucială pentru sisteme foarte mari (mai ales rare) în știință și inginerie
- 1958, Wilkinson: factorizarea *QR*

Recapitulare și/sau întrebări curs 2

1. Produse scalare
2. Norme
    1. Vectoriale
    2. Euclidiene
    3. Matriceale
        1. Naturale (induse)
    4. Spectrale
3. Istoria rezolvării sistemelor liniare

https://www.uaic.ro/despre-uaic/alma-mater-iassiensis/#single/0 - pentru istoria UAIC



(AI generated image)