

Algebră Liniară și Optimizare

Curs 1

Anca Ignat & Corina Forăscu

Pagina web: <https://edu.info.uaic.ro/algebra-liniara/>

Discord: <https://discord.gg/eGQYadYH>



Agenda cursului 1

- 1) Organizare, echipă, comunicare
- 2) Evaluare & reguli
- 3) Tematica (algebră liniară + optimizare)
- 4) Exemple (trafic, rețele, imagini)
- 5) Preliminarii: vectori, matrici, spații vectoriale

Echipa ALO (emails)

Cursuri:

- conf dr. [Anca IGNAT](#),
- conf dr. [Corina FORĂSCU](#)

Seminarii și laboratoare:

- conf dr. Anca IGNAT,
- conf dr. [Andreea ARUSOAIE](#)

Orar: https://edu.info.uaic.ro/orar/discipline/orar_alo.html

Structura activităților la curs - 1

1. Exemple. Noțiuni introductive: operații cu vectori și matrice, tipuri de matrice elementare.
2. Norme vectoriale și matriceale. Istoria rezolvării sistemelor liniare
3. Erori în calculele numerice (surse, propagare).
Condiționare și stabilitate
4. Metodele substituției pentru rezolvarea sistemelor triunghiulare. Algoritmul de eliminare Gauss.
5. Descompuneri LU
6. Descompuneri QR
7. Metode de aproximare a valorilor și vectorilor proprii: metoda puterii și a iterației inverse, forma Hessenberg.
Metode de aproximare a valorilor și vectorilor proprii: metode de tip QR. Descompunerea după valori singulare

Structura activităților la curs - 2

8. Rezolvarea sistemelor liniare: recapitulare, exemple
9. Scheme de memorare a matricelor rare. Metode iterative de rezolvare a sistemelor mari și rare: metodele Jacobi, Gauss-Seidel
10. Introducere în probleme de optimizare, tipuri de probleme de optimizare, condiții necesare și/sau suficiente
11. Metode iterative de rezolvare a sistemelor liniare pentru matrice simetrice și pozitiv definite: metodele relaxării, metoda pantei maxime, metoda gradientilor conjugați
12. Rezolvarea ecuațiilor neliniare: metodele bisecției, tangentei, coardei și secantei, metode de aproximare a rădăcinilor polinoamelor
13. Interpolare numerică: Lagrange, forme Newton, spline, cele mai mici pătrate
14. Metode de optimizare numerică fără restricții

Modalitatea de evaluare - 1

Punctaj final =

$$\begin{aligned} &= \text{punctaj laborator (max 300) (37.5\%)} + \\ &+ 10 * \text{nota test seminar (în S7) (12.5\%)} + \\ &+ 40 * \text{nota test scris (în sesiune) (50\%)} \end{aligned}$$

Condiții de promovare a disciplinei:

- nota la testul scris din sesiune ≥ 3

ȘI

- punctajul final ≥ 360

Modalitatea de evaluare - curs

Test scris în sesiunea de examene

- ✓ teză scrisă cu 3 - 4 exerciții din materia predată - 1 oră
- ✓ în prima jumătate de oră a testului scris este permis accesul doar la documentație tipărită (fără resurse electronice)
- ✓ teza scrisă este notată între 1 și 10
- ✓ pt promovare, nota la testul scris trebuie să fie cel puțin 3

Modalitatea de evaluare - seminar

Lucrare scrisă în săptămâna a 7-a

- ✓ jumătate de oră, la seminar,
- ✓ din exercițiile făcute la seminariile precedente și cel curent
- ✓ lucrarea scrisă este notată între 1 și 10

Modalitatea de evaluare - laborator

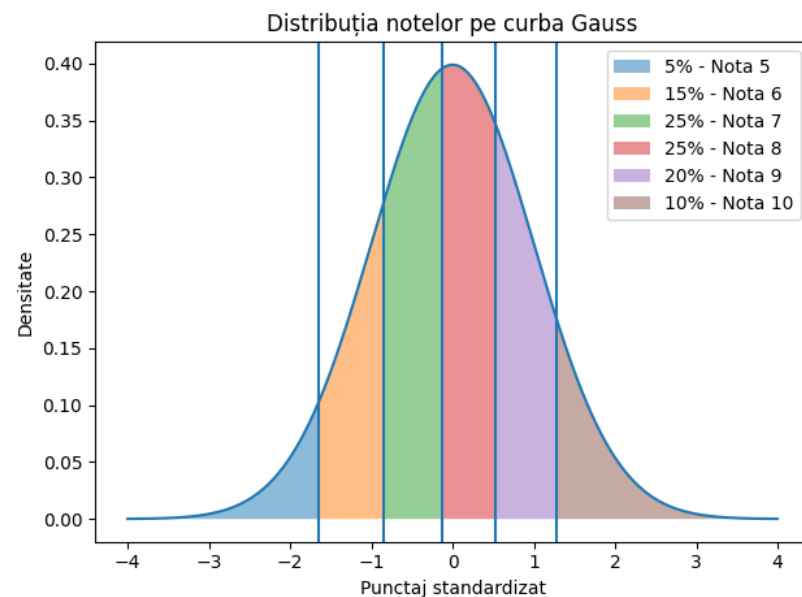
5 teme de laborator

- ✓ disponibile la <https://edu.info.uaic.ro/algebra-liniara/>
- ✓ evaluate conform cu precizările de la aceeași pagină
- ✓ fiecare cu punctaj și termen de predare clare
- ✓ punctaj maxim la laborator: 300 pt.
- ✓ se acordă un bonus de maxim 5 pt. pentru orice temă prezentată cu cel puțin o săptămână mai devreme decât termenul limită.

Modalitatea de evaluare - 2

Nota finală se calculează în funcție de punctajele finale, folosind **distribuția Gauss**:

primii 10% - nota 10,
următorii 20% - nota 9,
următorii 25% - nota 8,
următorii 25% - nota 7,
următorii 15% - nota 6,
următorii 5% - nota 5



Procentele se calculează din numărul de studenți care au îndeplinite condițiile de promovare.

Modalitatea de evaluare - 3

NEPROMOVARE: Dacă studentul nu îndeplinește criteriile minimale, poate opta în sesiunea de reexaminare pentru refacerea testului scris din sesiune.

MĂRIRE: Dacă studentul îndeplinește criteriile minimale, dar dorește mărirea notei, poate opta în sesiunea de reexaminarea pentru refacerea testului scris din sesiune.

Bibliografie

1. G.H. Golub, C.F. Van Loan, Matrix Computations, JHU Press, 1996
2. C. Ignat, C. Ilioi, T. Jucan, Elemente de informatică și calcul numeric –vol. 2, Editura Univ. „Al.I. Cuza” Iași, 1989
3. R.L. Burden, J.D. Faires, Numerical Analysis– Brooks/Cole, Thomson Learning (10-th edition, 2015)
4. Nocedal, J. and Wright, S., Numerical Optimization, Springer Series in Operations Research and Financial Engineering (Springer New York, 2006)

Motivații



Linear algebra is the language of modern applied mathematics.

Gilbert Strang (MIT), “regele” algebrei liniare moderne

👍 Rețelele neuronale, embedding-urile, transformările liniare — toate vorbesc „matrice și vectori”. Practic, fără algebra liniară, AI-ul rămâne mut.

Motivații



The purpose of computing is insight, not numbers.

Richard Hamming – Matematician & pionier în calcul numeric

👍 Algebra liniară și optimizarea nu sunt despre calcule mecanice — sunt despre înțelegerea structurii datelor și găsirea celor mai bune soluții.

Structură curs 1

Exemple practice

Noțiuni introductive (\approx recap.) despre vectori și matrice:

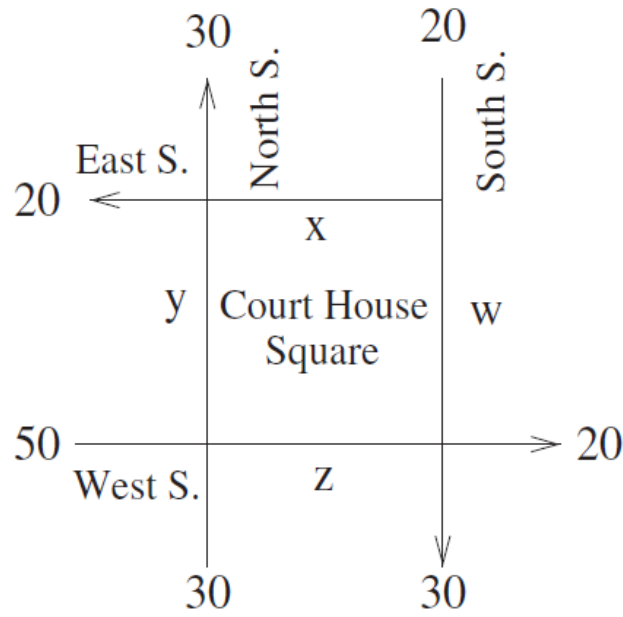
operații cu vectori și matrice

tipuri de matrice elementare

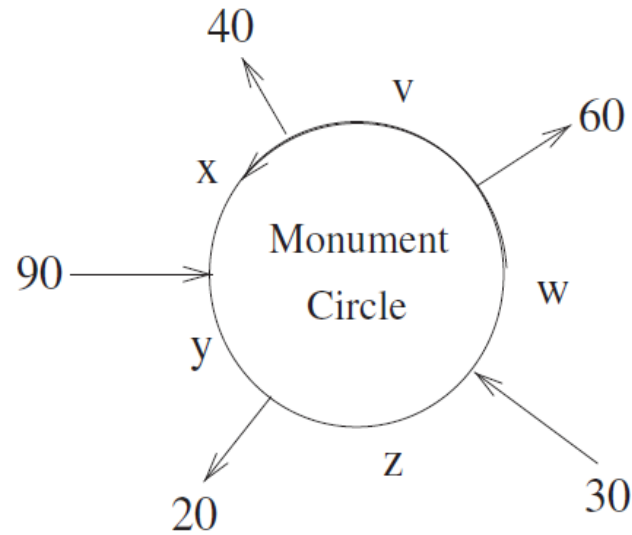
Exemple practice (EP)

1. Traficul și sistemele liniare
2. Centralitatea în rețelele sociale
3. Compresia imaginilor digitale și descompunerea după valori singular (SVD)

(EP): Traffic flow and... linear systems



(a)



(b)

FIGURE 1.24 Two traffic patterns.

(R.C. Penney – Linear Algebra, Ideas and Applications, 4-th ed., Wiley, 2016)

(EP) Traffic flow and... linear systems

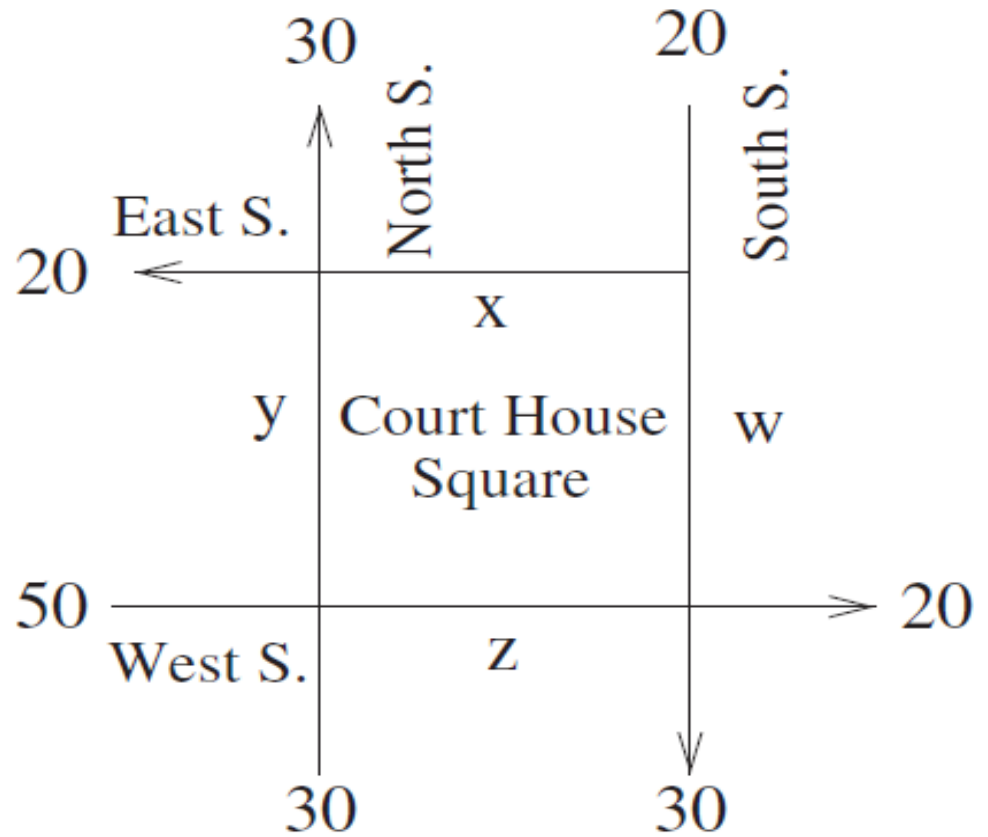


- one way streets;
- the numbers represent the average number of cars per minute that enter or leave a given street at 3:30pm;
- x, y, z, w, \dots - average number of cars per minute on a certain street
- no. of cars entering = no. of cars leaving

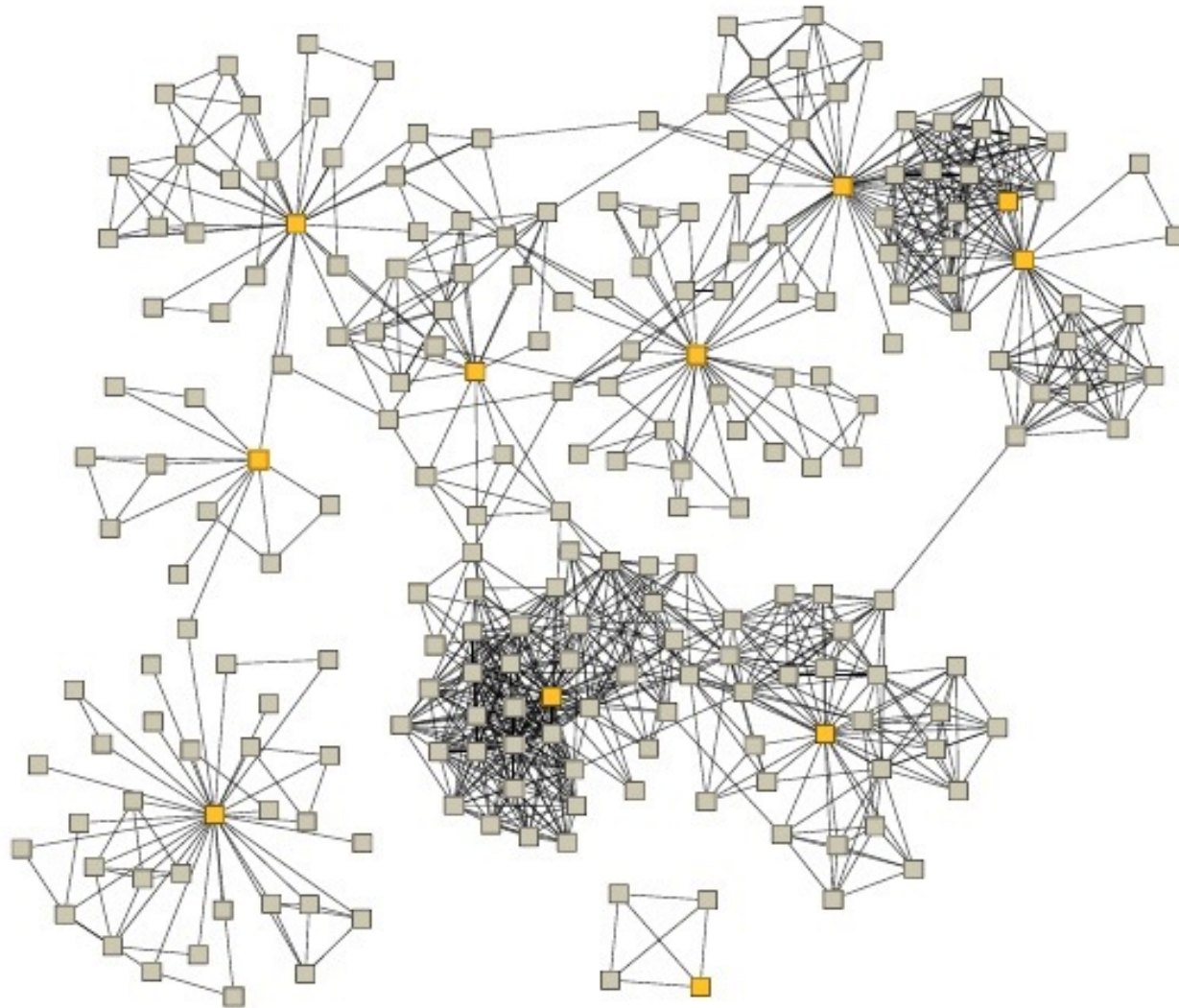
(EP) Traffic flow and... linear systems



$$\left\{ \begin{array}{rcl} x + y & = & 50 \\ y + z & = & 80 \\ z + w & = & 50 \\ x + w & = & 20 \\ x + y + z + w & = & 100 \end{array} \right.$$



(EP) Centralitate în rețelele sociale



(EP) Centralitate în rețelele sociale



Centralitatea indică poziția sau importanța unui element într-o structură relațională - noțiune introdusă de Alex Bavelas în 1948 studiind comunicarea între oameni.

Care sunt cele mai „importante” noduri din rețea?

Un nod este considerat „central” dacă:

1. are multe conexiuni directe (*degree centrality*),
2. controlează fluxul de informație (*betweenness*),
3. este aproape de toți ceilalți (*closeness*),
4. este conectat cu alți actori importanți (*eigenvector*).

(EP) Centralitate în rețelele sociale



Fie (V, E) – graful care modelează rețeaua, unde
 V – noduri/vârfuri (persoane într-o rețea socială)
 E – muchii între noduri (relații - prietenie, comunicare etc.)

Fie A – matricea de adiacență asociată, $A = (a_{ij})_{i,j=\overline{1,N}}$,
unde N este numărul de noduri - $N = |V|$

Se numește **drum geodesic** între două vârfuri orice drum de lungime minimă (număr minim de muchii) dintre cele 2 vârfuri.

(EP) Centralitate de grad (*degree centrality*)



Este numărul de legături directe (conexiuni) pe care le are un nod.

$$\text{deg}(v_i) = \text{numărul de muchii incidente în nodul } v_i$$

Un nod cu *degree* mare:

- este bine conectat
- poate difuza informație rapid
- are acces direct la multe resurse

DAR NU înseamnă neapărat că e „strategic important” în rețea
(pentru asta se folosesc *betweenness* sau *eigenvector centrality*)

(EP) Centralitate de apropiere (*closeness c.*)



Este suma lungimilor drumurilor geodesice de la nodul respectiv la toate celelalte noduri.

Un individ cu *closeness* mare:

- poate transmite informația rapid
- are acces eficient la restul rețelei
- nu depinde mult de intermediari

Este genul de persoană „bine poziționată strategic”, chiar dacă nu are neapărat cele mai multe conexiuni directe.



(EP) Centralitate de interrelație/intermediere (*betweenness c.*)

Măsoară în ce măsură un nod se află pe drumurile minime dintre alte noduri din rețea - cât de mult controlează un nod fluxul de informație dintre alți actori.

$$b(v) = \sum_{\substack{s \neq v \neq t, \\ s, t \in V}} \frac{n_{st}(v)}{n_{st}}$$

Un nod cu *betweenness* mare:

- face legătura între grupuri diferite
- poate controla sau filtra informația
- este „broker” sau intermediar strategic

Chiar dacă nu are multe conexiuni directe, poate fi foarte influent.

(EP) Centralitate de vector propriu (*eigenvector c.*)



Măsoară importanța unui nod ținând cont nu doar de numărul conexiunilor sale, ci și de importanța nodurilor cu care este conectat.

Un individ cu *eigenvector* mare:

- este conectat la alți actori influenți
- face parte din „nucleul” rețelei
- are influență structurală, nu doar locală

Este genul de persoană conectată la alți lideri — efect de elită.



(EP) Centralitate de vector propriu (*eigenvector c.*)

x_i este centralitatea de vector propriu a nodului v_i

$$x(i) = \frac{1}{\lambda} \sum_{j \in \Gamma(v_i)} x(j) = \frac{1}{\lambda} \sum_{j=1}^N a_{ij} x(j)$$

$$\mathbf{x} = (x(1), x(2), \dots, x(N))^T$$

$$\mathbf{x} = \frac{1}{\lambda} A\mathbf{x} \Leftrightarrow A\mathbf{x} = \lambda \mathbf{x}$$

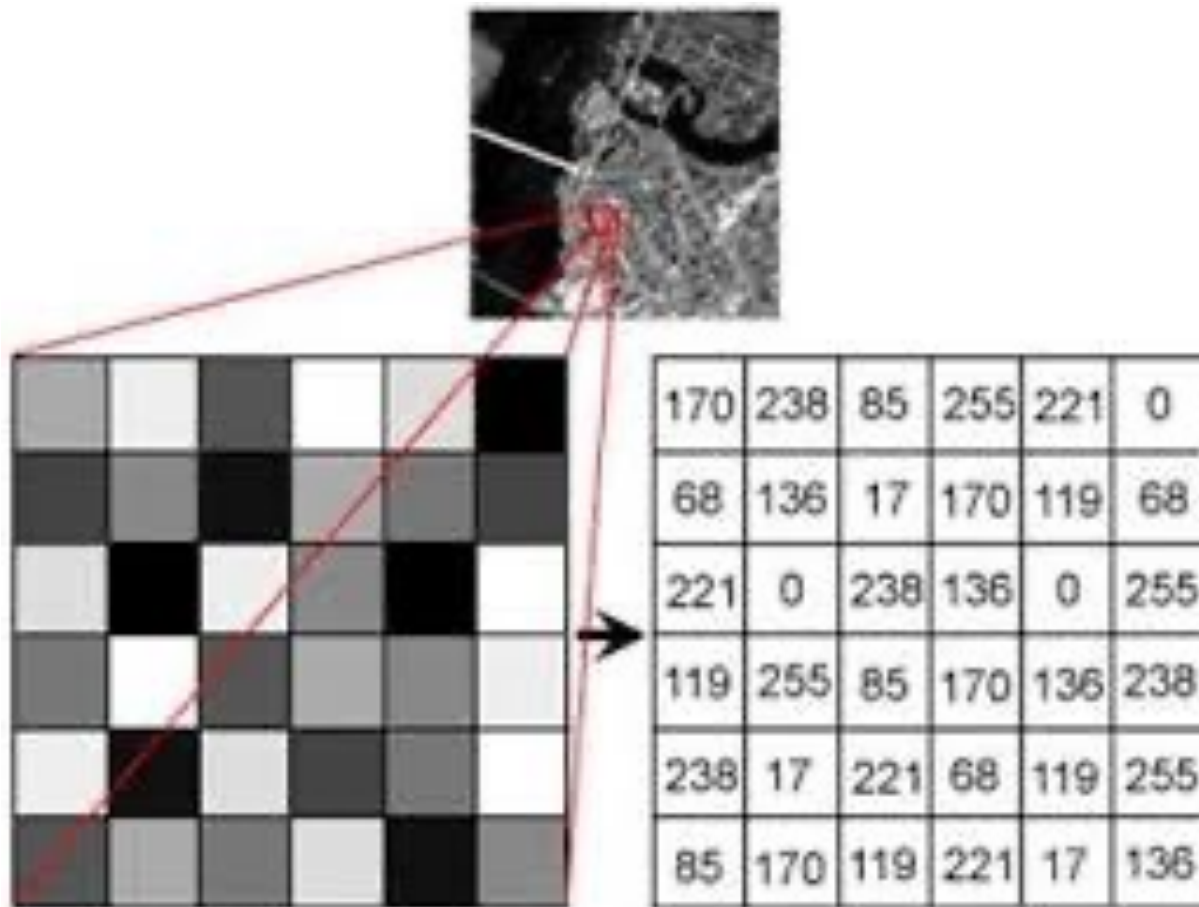
$\lambda > 0$ este valoarea proprie Perron (cea mai mare valoare proprie)

a matricei A , iar x este vectorul propriu asociat

(EP) Compresia imaginilor digitale și descompunerea după valori singulare



1. Imaginea originală → matrice de pixeli A cu m linii și n coloane



(EP) Compresia imaginilor digitale și descompunerea după valori singulare

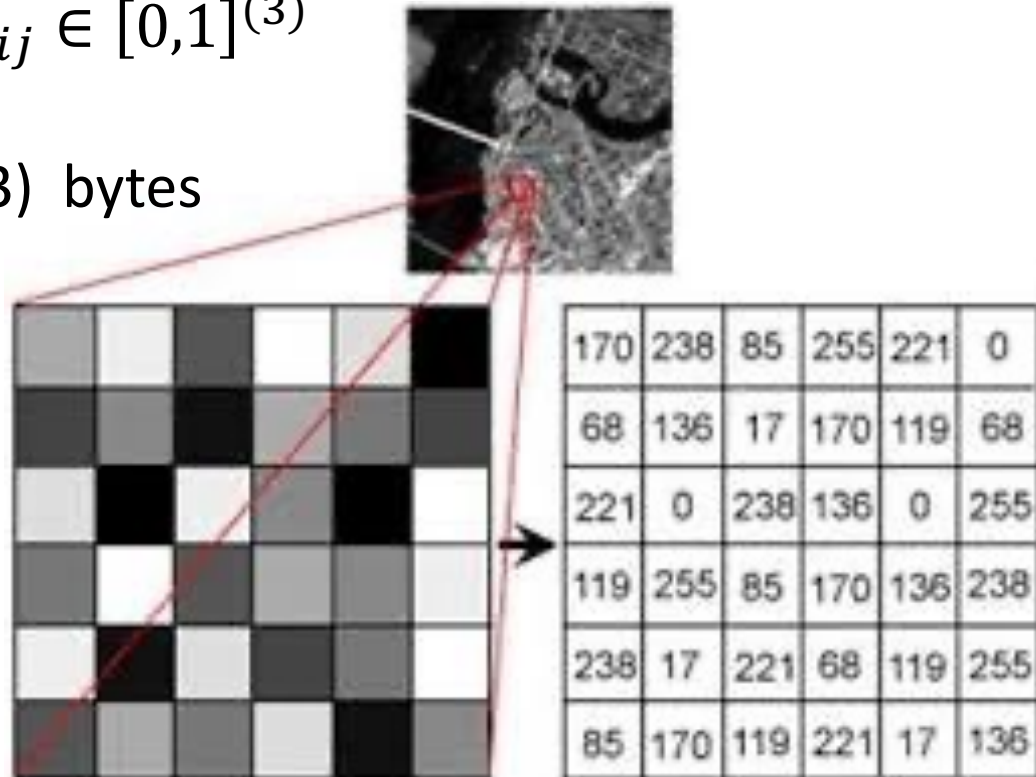


1. Imaginea originală \rightarrow matrice de pixeli A cu m linii și n coloane

$A = (a_{ij})_{i=\overline{1,m}, j=\overline{1,n}}$, $a_{ij} \in \mathbb{R}$ sau $a_{ij} \in \mathbb{R}^3$
unde $a_{ij} \in \{0, 1, 2, \dots, 255\}$ sau
 $a_{ij} \in \{0, 1, 2, \dots, 255\}^3$ sau $a_{ij} \in [0, 1]^{(3)}$

Memorarea lui A :

$m \cdot n \cdot \text{mem}(\text{int}/\text{double}) \cdot 3$ bytes





(EP) Compresia imaginilor digitale și descompunerea după valori singulare

2. Descompunerea matricei A după valori singulare (SVD), pentru a simplifica matricea, păstrând esențialul din ea. SVD separă informația în: direcții importante (în U și V) și „cantitatea” de informație pe fiecare direcție (valorile singulare din S)

$A = U \cdot S \cdot V^T$, $U \in \mathbb{R}^{m \times m}$, $V \in \mathbb{R}^{n \times n}$, unde U și V sunt matrici ortogonale:

$$U = [u_1, u_2, \dots, u_m], V = [v_1, v_2, \dots, v_n],$$

$$(u_i, u_j)_{\mathbb{R}^m} = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{dacă } i = j \\ 0, & \text{dacă } i \neq j \end{cases} \quad (v_i, v_j)_{\mathbb{R}^n} = \delta_{ij}, \forall i, j.$$

$$S = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & & 0 & 0 \\ & & \ddots & & \\ 0 & 0 & & \sigma_r & 0 \\ & & & & \ddots \\ 0 & 0 & & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times n} \quad A = \sigma_1 u_1 v_1^T + \sigma_2 u_2 v_2^T + \dots + \sigma_r u_r v_r^T$$

$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_r > 0$, $r \leq \min\{m, n\}$ Sunt valorile singular ale matricei A .

(EP) Compresia imaginilor digitale și descompunerea după valori singulare



3. Păstrarea primelor k valori singular dintre cele r

4. Reconstrucția aproximată

$$A \approx A_k = \sigma_1 \mathbf{u}_1 \mathbf{v}_1^T + \sigma_2 \mathbf{u}_2 \mathbf{v}_2^T + \dots + \sigma_k \mathbf{u}_k \mathbf{v}_k^T$$

Memorarea lui A_k necesită $k(m+n+1) \cdot \text{mem}(\text{double})$ ($k \cdot m$ pt U_k , $k \cdot n$ pt V_k , respectiv k pentru σ_k)

Rata de compresie este $r_c = \frac{mn}{k(m+n+1)}$

5. Compresie prin reducerea rangului.

- ✓ Cu cât k e mai mic \rightarrow compresie mai mare, dar pierdere mai vizibilă.
- ✓ Cu cât imaginea are mai multă structură (zone uniforme) \rightarrow SVD funcționează mai bine.
- ✓ Texturi complexe $\rightarrow k$ trebuie ales mai mare.

(EP) Compresia imaginilor digitale și descompunerea după valori singulare



Exemplu concret de compresie

Imagine 1000×1000 pixeli

Inițial stocăm: 1.000.000 Valori

Dacă alegem $k = 50$

Stocăm: $50(1000+1000+1) = 50 \cdot 2001 = 100.050$

Rezultă $r_c \approx 10$

Deci aproximativ 10:1 compresie și vizual diferența poate fi foarte mică.

Vectori și matrici

Fie $x_i, y_i, \lambda \in \mathbb{R}$.

Se definesc vectorii $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ și operațiile de adunare (internă) a vectorilor și înmulțire (externă) a vectorilor cu scalari astfel:

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \mathbf{x} + \mathbf{y} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}, \lambda \mathbf{x} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{pmatrix}$$

Vectori și matrici

Fie numărul complex $z \in \mathbb{C}$, $z = a + ib$.

Notăm $\text{Re } z = a$ – partea reală a lui z și

$\text{Im } z = b$ – partea imaginară a lui z

$\bar{z} = a - ib$ – conjugatul numărului complex z

$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ – modulul numărului complex z

Fie vectorul $z \in \mathbb{C}^n$:

$$z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} \text{ cu } z_1, z_2, \dots, z_n \in \mathbb{C}.$$

Notăm cu $\mathbb{R}^{m \times n} / \mathbb{C}^{m \times n}$ mulțimea tuturor matricilor cu elemente reale / complexe cu m linii și n coloane:

$$A = (a_{ij})_{i=\overline{1,m}, j=\overline{1,n}}, a_{ij} \in \mathbb{R} \text{ sau } a_{ij} \in \mathbb{C}$$

Spațiu vectorial

$(X, +, \cdot)$, pe scurt X , se numește spațiu vectorial (spațiu liniar) peste corpul K

$$+ : X \times X \rightarrow X \text{ și } \cdot : K \times X \rightarrow X, (K = \mathbb{R})$$

astfel încât $(X, +)$ este un grup comutativ:

$$a + b = b + a, \forall a, b \in X - \text{comutativitate,}$$

$$(a + b) + c = a + (b + c), \forall a, b, c \in X - \text{asociativitate,}$$

$$\exists 0 \in X \text{ a.î. } a + 0 = 0 + a = a, \forall a \in X - \text{element neutru,}$$

$$\forall a \in X, \exists -a \in X \text{ a.î. } a + (-a) = (-a) + a = 0 - \text{element opus.}$$

iar pentru operația de înmulțire cu scalari au loc relațiile:

$$\lambda \cdot (a + b) = \lambda \cdot a + \lambda \cdot b, \forall \lambda \in K, \forall a, b \in X,$$

$$(\lambda + \mu) \cdot a = \lambda \cdot a + \mu \cdot a, \forall \lambda, \mu \in K, \forall a \in X,$$

$$\lambda \cdot (\mu \cdot a) = (\lambda \mu) \cdot a, \forall \lambda, \mu \in K, \forall a \in X,$$

$$\exists 1 \in K \text{ astfel încât } 1 \cdot a = a, \forall a \in X.$$

Vectori in/dependenți. Bază

Fie X un spațiu linear. Spunem că vectorii $x_1, x_2, \dots, x_p \in X$ sunt linear independenți dacă:

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_p x_p = \mathbf{0} \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_p = 0, \alpha_i \in K$$

Dacă relația $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_p x_p = \mathbf{0}$ implică existența a cel puțin unui scalar $\alpha_i \neq 0$, atunci vectorii x_1, x_2, \dots, x_p se numesc linear dependenți.

Un spațiu vectorial X este fini dimensional dacă în spațiul X există p vectori linear independenți, $x_1, x_2, \dots, x_p \in X$, și orice mulțime de q elemente din X cu $q > p$ este linear dependentă. În acest caz dimensiunea spațiului X este p ($\dim X = p$).

Bază a unui spațiu vectorial

Fie spațiul vectorial X finit dimensional cu $\dim X = p$.

Orice sistem de p vectori liniar independenți din X se numește bază a spațiului X .

Fie $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_p \in X$ o bază pentru spațiul X . Atunci pentru orice vector $\forall \mathbf{x} \in X$, există și sunt unice constantele $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p \in K$ astfel încât:

$$\mathbf{x} = \alpha_1 \mathbf{x}_1 + \alpha_2 \mathbf{x}_2 + \dots + \alpha_p \mathbf{x}_p = \sum_{i=1}^p \alpha_i \mathbf{x}_i .$$

Constantele $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p \in K$ se numesc coordonatele vectorului \mathbf{x} în (raport cu) baza $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_p$.

Bază a unui spațiu vectorial

- \mathbb{R}^n este un spațiu vectorial finit dimensional în raport cu operațiile uzuale de adunare a vectorilor și înmulțire a vectorilor cu scalari, $\dim \mathbb{R}^n = n$, cu baza canonică:

$$e_1 = \begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{0} \\ \vdots \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{1} \\ \vdots \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}, \dots, e_k = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \vdots \\ \mathbf{1} \\ \vdots \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \text{ - poziția } k, \dots, e_n = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \vdots \\ \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

- $\mathbb{R}^{m \times n}$ este un spațiu vectorial finit dimensional în raport cu operațiile uzuale de adunare a matricilor și înmulțire a matricilor cu scalari, $\dim \mathbb{R}^{m \times n} = m \times n$

Calcul matricial: tipuri și operații cu matrici

Fie matricea $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad A = (a_{ij})_{i=1 \dots m, j=1 \dots n}$$

Definim matricea transpusă, notată cu A^T :

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{m1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad A^T = (a_{ji})_{i=1 \dots m, j=1 \dots n} \in \mathbb{R}^{n \times m}$$

Operații cu matrici

Pentru matricea $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$, $A = (a_{ij})_{i=\overline{1,m}, j=\overline{1,n}}$, $a_{ij} \in \mathbb{C}$ se definește **matricea adjunctă** (*conjugat transpusă*), notată cu A^H :

$$A^H = \overline{A^T} = \left(\overline{a_{ji}} \right)_{\substack{j=1 \dots n \\ i=1 \dots m}}$$

$$A = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_{11} & \cdots & \mathbf{a}_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{a}_{m1} & \cdots & \mathbf{a}_{mn} \end{pmatrix},$$

$$A^H = \begin{pmatrix} \overline{\mathbf{a}_{11}} & \cdots & \overline{\mathbf{a}_{m1}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \overline{\mathbf{a}_{1n}} & \cdots & \overline{\mathbf{a}_{mn}} \end{pmatrix}$$

Pentru $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ matricea adjunctă coincide cu transpusa: $A^H = A^T$.

Operații cu matrici

Proprietățile matricei A^H :

$$(A + B)^H = A^H + B^H$$

$$(A^H)^H = A$$

$$(AB)^H = B^H A^H$$

$$(A^{-1})^H = (A^H)^{-1}$$

Proprietățile matricei A^T :

$$(A + B)^T = A^T + B^T$$

$$(A^T)^T = A$$

$$(AB)^T = B^T A^T$$

$$(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$$

Operații cu matrici

Vectorul $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ este considerat vector coloană, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$:

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{x}^T = (x_1 \ x_2 \ \cdots \ x_n)$$

Prin înmulțirea $A\mathbf{e}_j$ se obține coloana j a matricii A , $j=1, \dots, n$.

$$A\mathbf{e}_j = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \vdots \\ \mathbf{1}_{\text{poziția } j} \\ \vdots \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$$

Prin înmulțirea $\mathbf{e}_i^T A$ se obține linia i a matricii A , $i=1, \dots, m$.

Tipuri de matrici

O matrice $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ se numește simetrică dacă
 $A = A^T$.

O matrice $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ se numește autoadjunctă dacă
 $A = A^H$.

O matrice $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ se numește unitară dacă
 $A^H A = A A^H = I_n$, unde $I_n \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e matricea unitate

O matrice $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ se numește ortogonală dacă
 $A^T A = A A^T = I_n$.

Tipuri de matrici

O matrice $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ se numește *triunghiulară inferior* (sau *inferior triunghiulară*) dacă $a_{ij} = 0$ pentru $j > i$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ a_{21} & a_{22} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \vdots & & & & & \\ a_{(n-1)1} & a_{(n-1)2} & a_{(n-1)3} & \cdots & a_{(n-1)(n-1)} & \mathbf{0} \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{n(n-1)} & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Tipuri de matrici

O matrice $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ se numește *triunghiulară superior* (sau *superior triunghiulară*) dacă $a_{ij} = 0$ pentru $j < i$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1(n-1)} & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2(n-1)} & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3(n-1)} & a_{3n} \\ \vdots & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{(n-1)(n-1)} & a_{(n-1)n} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Tipuri de matrici

O matrice $D \in \mathbb{R}^{n \times n}$ se numește diagonală dacă $a_{ij} = 0$ pentru $j \neq i$:

$$D = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & d_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & d_n \end{pmatrix}$$

Se notează simplificat cu $D = \text{diag}[d_1, d_2, \dots, d_n]$.

$$D * A = \begin{bmatrix} d_1(e_1^T A) \\ d_2(e_2^T A) \\ \vdots \\ d_n(e_n^T A) \end{bmatrix}, \quad A * D = [d_1(Ae_1) \ d_2(Ae_2) \ \cdots \ d_n(Ae_n)]$$

Recapitulare și/sau întrebări curs 1

Exemple practice

1. Traficul și sistemele liniare
2. Centralitatea în rețelele sociale
3. Compresia imaginilor digitale și descompunerea după valori singular (SVD)

Noțiuni introductive (\approx recap.) despre vectori și matrice:
operații cu vectori și matrice
tipuri de matrice elementare